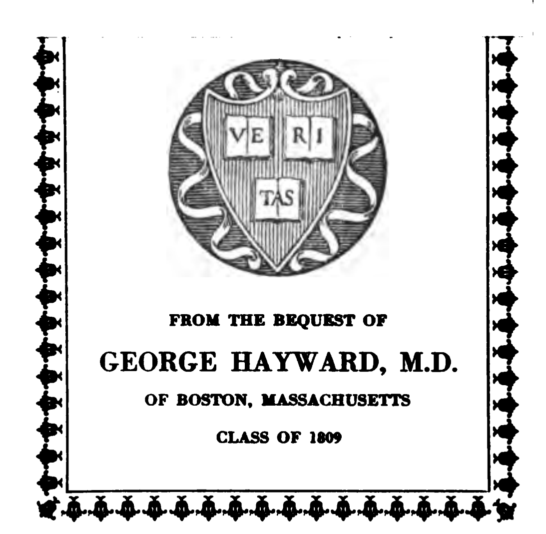
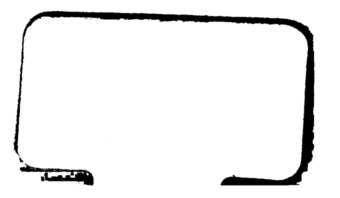








B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSZ IHRER ANWENDUNGEN.
BAND XIII.

LEHRBUCH
DER DIFFERENZENRECHNUNG

VON

DEMETRIUS SELIWANOFF,
PRIVAT-DOZENT AN DER UNIVERSITÄT UND PROFESSOR AN DEN
HÖHEREN FRAUENKURSEN ZU ST. PETERSBURG.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

Vorwort.

Die älteren Werke über Differenzenrechnung besitzen nicht die Strenge, die unsrer Zeit eigentümlich ist. In dieser Beziehung ist befriedigend das Buch von A. A. Markoff (Differenzenrechnung, St. Petersburg 1889—1891; deutsch von Th. Friesendorf und E. Prümm. Leipzig, bei B. G. Teubner. 1896). Ich habe versucht einige Verbesserungen zu machen. Vielleicht ist es mir gelungen einige Beweise zu vereinfachen und den Stoff systematischer anzuordnen. Um die Arbeit den Studierenden zu erleichtern, habe ich speziellere Probleme beiseite gelassen und mich hauptsächlich auf elementare Fragen beschränkt.

Worin nach meiner Meinung das Wesentliche in der Differenzenrechnung besteht, habe ich in einem Referat dargestellt. (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, p. 918—937.) Dort findet man hinreichende Literaturangaben. In kleinem Raume konnte ich nur Sätze aussprechen, die Beweise sollte der Leser selbst suchen. Um ihm die erforderliche Mühe und Zeit zu ersparen, folge ich dem Vorschlag des Herrn B. G. Teubner und übergebe der Öffentlichkeit dieses Lehrbuch.

St. Petersburg, den 6. Dezember 1903.

D. Seliwanoff.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Differenzen.

Erstes Kapitel.

Hauptsätze über Differenzen.

Zweites Kapitel.

Interpolation.

Drittes Kapitel.

Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale.

Zweiter Teil.

Summen.

Erstes Kapitel.

Unbestimmte und bestimmte Summen.

Zweites Kapitel.

Die Jacob Bernoullische Funktion.

Drittes Kapitel.

Eulersche Summationsformel.

Viertes Kapitel.

Anwendungen der Eulerschen Formel.

Dritter Teil.

Differenzengleichungen.

Erstes Kapitel.

Allgemeines über Differenzengleichungen.

Zweites Kapitel.

Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung.

Drittes Kapitel.

Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Erster Teil.

Differenzen.

Erstes Kapitel.

Hauptsätze über Differenzen.

1. Definitionen. Wenn eine Funktion $f(x)$ gegeben ist, so heißt der Ausdruck $f(x+h)-f(x)$ Differenz von $f(x)$, in Zeichen:

$$f(x+h)-f(x)=\Delta f(x).$$

Wenn man diesen Ausdruck in eine andre Form bringt, so entsteht die Gleichung

$$f(x+h)-f(x)=\varphi(x)$$

oder

$$\Delta f(x)=\varphi(x).$$

Hier kann x beliebige Werte annehmen, h soll aber konstant bleiben.

Ist z. B. $f(x)=x^3$, $h=1$, so hat man

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad f(2)=8,\quad f(3)=27,\quad f(4)=64,\ldots$$
$$\Delta f(0)=1,\quad \Delta f(1)=7,\quad \Delta f(2)=19,\quad \Delta f(3)=37,\ldots$$

Die Differenz von $\Delta f(x)$ heißt zweite Differenz von $f(x)$ oder Differenz zweiter Ordnung:

$$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+h)-\Delta f(x).$$

Entsprechend ist

$$\Delta^3 f(x)=\Delta^2 f(x+h)-\Delta^2 f(x),\quad \Delta^4 f(x)=\Delta^3 f(x+h)-\Delta^3 f(x),\ldots$$

In dem Beispiel ist

$$\Delta^2 f(0)=6,\quad \Delta^2 f(1)=12,\quad \Delta^2 f(2)=18,\ldots$$
$$\Delta^3 f(0)=6,\quad \Delta^3 f(1)=6,\ldots$$
$$\Delta^4 f(0)=0,\ldots$$

Diese Resultate lassen sich in folgender Tabelle zusammenstellen:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0	1	6	6	0
1	1	7	12	6	
2	8	19	18		
3	27	37			
4	64				

2. Differenzen einfacher Funktionen. Unter einfachen Funktionen versteht man diejenigen, deren Differenz direkt bestimmt werden kann. Die Funktion heißt zusammengesetzt, wenn ihre Differenz durch die Differenzen andrer Funktionen ausgedrückt werden kann.

In der Differentialrechnung ist

$$(x^n)' = n x^{n-1}.$$

Die Differenz von x^n hat keine einfache Form, weil

$$\Delta x^n = n h x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h^2 x^{n-2} + \cdots + h^n$$

ist. Die einfache Funktion, die der Potenz entspricht, ist in der Differenzenrechnung die folgende

$$f(x) = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}h).$$

Die direkte Rechnung ergibt

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)x(x-h)\ldots(x-\overline{n-2}h)$$
$$- x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}h).$$

Um diesen Ausdruck zu transformieren, setzen wir vor die Klammern den gemeinsamen Faktor

$$x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-2}h)$$

und machen Reduktionen in den Klammern.

Auf diese Weise findet man die Formel

$$\Delta[x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}h)]$$
$$= nhx(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-2}h).$$

Spezielle Fälle dieser Formel sind

$$\Delta x = h, \quad \Delta[x(x-h)] = 2hx,$$
$$\Delta[x(x-h)(x-2h)] = 3hx(x-h), \ldots$$

Etwas einfacher ist die Formel

$$\Delta \frac{x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}\,h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} = h\cdot\frac{x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-2}\,h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)},$$

die ganz analog bewiesen wird.

Wir werden noch folgende einfache Funktionen angeben:

$$\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+\overline{n-1}\,h)},\quad m^x,\quad \sin x,\quad \cos x.$$

Hier ist m eine Konstante.

Die direkte Rechnung ergibt

$$\Delta \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+\overline{n-1}\,h)} = \frac{1}{(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots(x+nh)}$$

$$-\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+\overline{n-1}\,h)}$$

$$= \frac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots(x+\overline{n-1}\,h)}\left[\frac{1}{x+nh}-\frac{1}{x}\right]$$

$$= -nh\cdot\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)}.$$

Spezielle Fälle dieser Formel sind

$$\Delta\frac{1}{x} = -h\cdot\frac{1}{x(x+h)},\quad \Delta\frac{1}{x(x+h)} = -2h\cdot\frac{1}{x(x+h)(x+2h)},\ldots$$

Etwas symmetrischer ist die Formel

$$\Delta\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+\overline{n-1}\,h)} = -h\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)}.$$

Eine sehr einfache Funktion ist m^x, weil

$$\Delta m^x = m^{x+h} - m^x = m^x(m^h-1).$$

Um die Differenz dieser Funktion zu bilden, genügt es, m^x mit dem konstanten Faktor $m^h - 1$ zu multiplizieren.

Nach den bekannten Formeln der Trigonometrie ist

$$\sin(x+h)-\sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos(x+h)-\cos x = -2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right) = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}+\frac{\pi}{2}\right).$$

Also wird

$$\Delta\sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h+\pi}{2}\right),$$

$$\Delta\cos x = -2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right) = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h+\pi}{2}\right).$$

Die wiederholte Anwendung der angegebenen Formeln liefert uns folgende Ausdrücke für Differenzen höherer Ordnung

$$\Delta^m \frac{x(x-h)(x-2h)\dots(x-\overline{n-1}h)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n} = h^m \cdot \frac{x(x-h)\dots(x-\overline{n-m-1}h)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-m)} \text{ für } m<n;$$

$$\Delta^n \frac{x(x-h)(x-2h)\dots(x-\overline{n-1}h)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n} = h^n,$$

$$\Delta^m \frac{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+\overline{n-1}h)} = (-h)^m \frac{1\cdot 2\cdot 3\dots(n+m-1)}{x(x+h)\dots(x+\overline{n+m-1}h)},$$

$$\Delta^n m^x = m^x(m^h-1)^n,$$

$$\Delta^n \sin x = \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^n \cdot \sin\left(x+n\cdot\frac{h+\pi}{2}\right),$$

$$\Delta^n \cos x = \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^n \cdot \cos\left(x+n\cdot\frac{h+\pi}{2}\right).$$

Das sind die wichtigsten Formeln, die für das Folgende ausreichen.

3. Differenzen zusammengesetzter Funktionen. Wenn

$$f(x) = \varphi(x) + C,$$

wobei C eine Konstante ist, so ist

$$f(x+h) - f(x) = [\varphi(x+h) + C] - [\varphi(x) + C] = \varphi(x+h) - \varphi(x),$$

also

$$\Delta f(x) = \Delta\varphi(x).$$

Bei der Berechnung der Differenz kann also der konstante Summand weggelassen werden.

Wenn

$$f(x) = C\varphi(x)$$

ist, so ist

$$\Delta f(x) = C\varphi(x+h) - C\varphi(x) = C[\varphi(x+h) - \varphi(x)]$$

oder

$$\Delta[C\varphi(x)] = C\Delta\varphi(x).$$

Der konstante Faktor kann also vor das Zeichen Δ gesetzt werden.

Ist die gegebene Funktion $f(x)$ Summe von mehreren Funktionen:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_\mu(x),$$

so findet man

$$\Delta f(x) = [f_1(x+h) + f_2(x+h) + \cdots + f_\mu(x+h)] - [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_\mu(x)]$$
$$= [f_1(x+h) - f_1(x)] + [f_2(x+h) - f_2(x)] + \cdots + [f_\mu(x+h) - f_\mu(x)].$$

Es besteht also die Formel

$$\Delta[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_\mu(x)] = \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x) + \cdots + \Delta f_\mu(x).$$

Die bewiesenen Sätze lassen sich in einer Formel vereinigen. Es ist

$$\Delta[C + C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \cdots + C_\mu f_\mu(x)]$$
$$= C_1 \Delta f_1(x) + C_2 \Delta f_2(x) + \cdots + C_\mu \Delta f_\mu(x),$$

wobei $C, C_1, C_2, \ldots, C_\mu$ konstant sind.

4. Differenzen ganzer Funktionen. Es sei

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_{n-1} x + p_n.$$

Es ist bequemer, diese Funktion zuerst in die Form

$$f(x) = A_0 + A_1 \frac{x-a}{1} + A_2 \frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2} + A_3 \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$
$$\cdots + A_n \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$

zu bringen. Zur Bestimmung der Koeffizienten bemerken wir, daß bei der Division von $f(x)$ durch $x-a$ der Rest A_0 ist und der Quotient

$$f_1(x) = A_1 + A_2 \frac{x-a-h}{1\cdot 2} + A_3 \frac{(x-a-h)(x-a-2h)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$
$$\cdots + A_n \frac{(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}.$$

Es ist noch zu bemerken, daß $f_1(x)$ die Form hat

$$f_1(x) = p_0 x^{n-1} + \cdots$$

Dividiert man $f_1(x)$ durch $x-a-h$, so findet man den Rest A_1 und den Quotient

$$f_2(x) = A_2 \frac{1}{1\cdot 2} + A_3 \frac{x-a-2h}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + A_n \frac{(x-a-2h)\ldots(x-a-\overline{n-1}h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}.$$

Das erste Glied von $f_2(x)$ ist $p_0 x^{n-2}$.
Schließlich ist

$$f_{n-1}(x) = A_{n-1}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\ldots(n-1)} + A_n \frac{x-a-\overline{n-1}h}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} = p_0 x + q.$$

Hier ist q eine Zahl, die sich vollständig bestimmen läßt.

Durch Division von $f_{n-1}(x)$ durch $x-a-\overline{n-1}h$ findet man den Rest $\frac{A_{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}$ und den Quotient $\frac{A_n}{1\cdot 2\ldots n}$. Dieser Quotient ist aber p_0. Es ist also

$$\frac{A_n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} = p_0.$$

Nachdem die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ bestimmt sind, erhält man mit Anwendung der Formeln (Nr. 2):

$$\Delta f(x) = h\left[A_1 + A_2\frac{x-a}{1} + \cdots + A_n\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-2}h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}\right],$$

$$\Delta^2 f(x) = h^2\left[A_2 + A_3\frac{x-a}{1} + \cdots + A_n\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-3}h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-2)}\right],$$

. . . .

$$\Delta^n f(x) = h^n\cdot A_n$$

oder

$$\Delta^n f(x) = h^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot p_0.$$

Es besteht also der Satz:

Die erste Differenz einer ganzen Funktion n^{ten} Grades ist vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade und die n^{te} Differenz ist konstant.

Für $x = a$ ist

$$f(a) = A_0, \quad \Delta f(a) = h\cdot A_1, \quad \Delta^2 f(a) = h^2\cdot A_2, \ldots$$
$$\Delta^n f(a) = h^n\cdot A_n.$$

Wir sehen, daß die Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sich durch Differenzen ausdrücken lassen:

$$A_0 = f(a), \quad A_1 = \frac{\Delta f(a)}{h}, \quad A_2 = \frac{\Delta^2 f(a)}{h^2}, \ldots, A_n = \frac{\Delta^n f(a)}{h^n}.$$

Diese Werte der Differenzen bestimmen sich durch die Werte der Funktion $f(x)$:

$$f(a), \quad f(a+h), \quad f(a+2h), \ldots, f(a+nh).$$

Da aber $f(x)$ eine beliebige ganze Funktion n^{ten} Grades ist, so besteht die Formel

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}\cdot\frac{\Delta f(a)}{h} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\Delta^2 f(a)}{h^2} + \cdots$$
$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\frac{\Delta^n f(a)}{h^n}$$

für jede Funktion von der Form

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n,$$

wobei einige Koeffizienten gleich Null sein können.

Das ist die **Newtonsche Interpolationsformel.**

Es sei z. B.

$$a = 0, \quad h = 1, \quad f(x) = x^3.$$

Wir haben schon in Nr. 1 gesehen, daß

$$f(0) = 0, \quad \Delta f(0) = 1, \quad \Delta^2 f(0) = 6, \quad \Delta^3 f(0) = 6.$$

Folglich ist

$$x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2).$$

Als zweites Beispiel nehmen wir

$$a = 0, \quad h = 1, \quad f(x) = \frac{(x+y)(x+y-1)\dots(x+y-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}.$$

Hier ist y konstant vorausgesetzt.

Nach der bewiesenen Formel (Nr. 2) ist

$$\Delta^m f(0) = \frac{y(y-1)\dots(y-n+m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-m)}.$$

Daraus folgt, daß

$$\frac{(x+y)(x+y-1)\dots(x+y-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n} = \frac{y(y-1)\dots(y-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}$$

$$+ \frac{x}{1}\cdot\frac{y(y-1)\dots(y-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)} + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{y(y-1)\dots(y-n+3)}{1\cdot 2\dots(n-2)} + \dots$$

$$\dots + \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}.$$

Diese Relation besteht für beliebige Werte von x und y; sie ist von Cauchy benutzt worden, um den binomischen Lehrsatz auf beliebige reelle Exponenten auszudehnen.*

5. Differenz des Produktes zweier Funktionen. Wenn man die Differenzen zweier Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ kennt, so ist es leicht, die Differenz ihres Produktes zu bilden.

Wenn $f(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x)$ ist, so ist

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \varphi(x+h)\cdot\psi(x+h) - \varphi(x)\cdot\psi(x)\\ &= [\varphi(x) + \Delta\varphi(x)]\psi(x+h) - \varphi(x)\cdot\psi(x)\\ &= \varphi(x)[\psi(x+h) - \psi(x)] + \psi(x+h)\cdot\Delta\varphi(x).\end{aligned}$$

Man findet also die Formel

$$\Delta[\varphi(x)\cdot\psi(x)] = \varphi(x)\cdot\Delta\psi(x) + \psi(x+h)\cdot\Delta\varphi(x).$$

Z. B. für $h = 1$ ist

$$\Delta\left[3^x\cdot\frac{x(x-1)}{2}\right] = 3^x\cdot x + \frac{(x+1)x}{2}\cdot 3^x\cdot 2 = \frac{x(x-1)}{2}\cdot 3^x\cdot 2 + 3^{x+1}\cdot x.$$

6. Differenzen von $\sin u$ und $\cos u$. Wir wollen voraussetzen, daß u eine Funktion von x ist, deren Differenz bekannt ist. Es ist $\Delta\sin u$ und $\Delta\cos u$ zu berechnen.

Wenn man x durch $x+h$ ersetzt, so geht u in $u + \Delta u$ über. Deswegen ist

$$\Delta\sin u = \sin(u+\Delta u) - \sin u = 2\sin\frac{\Delta u}{2}\cdot\cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right),$$

$$\Delta\cos u = \cos(u+\Delta u) - \cos u = -2\sin\frac{\Delta u}{2}\cdot\sin\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right).$$

---

* Cauchy, Cours d'analyse, p. 159. Paris. 1821.

Damit beschließen wir die Sätze über Differenzen zusammengesetzter Funktionen.

7. Berechnung äquidistanter Werte einer ganzen Funktion. Es sei $f(x)$ eine ganze Funktion n^{ten} Grades, deren Werte

$$f(a),\quad f(a+h),\quad f(a+2h),\ldots,\quad f(a+nh)$$

ausgerechnet seien.

Es sollen die Werte

$$f(a+\overline{n+1}h),\quad f(a+\overline{n+2}h),\quad f(a+\overline{n+3}h),\ldots$$

und

$$f(a-h),\quad f(a-2h),\quad f(a-3h),\ldots$$

bestimmt werden.

Diese Aufgabe läßt sich leicht mit Hilfe der Differenzen auflösen.

Durch wiederholte Subtraktionen bestimmt man die Reihe der Werte

$$\begin{array}{llll}
\Delta f(a), & \Delta f(a+h), & \Delta f(a+2h),\ldots, & \Delta f(a+\overline{n-1}h),\\
\Delta^2 f(a), & \Delta^2 f(a+h), & \Delta^2 f(a+2h),\ldots, & \Delta^2 f(a+\overline{n-2}h),\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\Delta^{n-1} f(a), & \Delta^{n-1} f(a+h), & & \\
\Delta^{n} f(a). & & &
\end{array}$$

Da aber $\Delta^n f(x)$ konstant ist (Nr. 4), so ist

$$\Delta^n f(a+h) = \Delta^n f(a).$$

Mit Benutzung der Formel

$$\Delta^{k-1} f(x+h) = \Delta^{k-1} f(x) + \Delta^k f(x)$$

und durch wiederholte Additionen erhält man die Werte

$$\begin{array}{lll}
\Delta^{n-1} f(a+2h) & = \Delta^{n-1} f(a+h) & + \Delta^{n} f(a+h),\\
\Delta^{n-2} f(a+3h) & = \Delta^{n-2} f(a+2h) & + \Delta^{n-1} f(a+2h),\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
\Delta^{2} f(a+\overline{n-1}h) & = \Delta^{2} f(a+\overline{n-2}h) & + \Delta^{3} f(a+\overline{n-2}h),\\
\Delta f(a+nh) & = \Delta f(a+\overline{n-1}h) & + \Delta^{2} f(a+\overline{n-1}h),\\
f(a+\overline{n+1}h) & = f(a+nh) & + \Delta f(a+nh).
\end{array}$$

In derselben Weise werden auch die Werte

$$f(a+\overline{n+2}h),\quad f(a+\overline{n+3}h),\ldots$$

berechnet.

Um $f(a-h)$ zu bestimmen, bemerken wir, daß

$$\Delta^n f(a-h) = \Delta^n f(a)$$

ist, und daß die Relation

$$\Delta^{k-1} f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^k f(x)$$

besteht.

Wiederholte Subtraktionen geben uns die Werte

$$\begin{aligned}
\Delta^{n-1} f(a-h) &= \Delta^{n-1} f(a) - \Delta^n f(a-h),\\
\Delta^{n-2} f(a-h) &= \Delta^{n-2} f(a) - \Delta^{n-1} f(a-h),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta^2 f(a-h) &= \Delta^2 f(a) - \Delta^3 f(a-h),\\
\Delta f(a-h) &= \Delta f(a) - \Delta^2 f(a-h),\\
f(a-h) &= f(a) - \Delta f(a-h).
\end{aligned}$$

Ebenso findet man auch die Werte

$$f(a-2h),\quad f(a-3h), \ldots$$

Als Beispiel nehmen wir

$$a = -1,\quad h = 1,\quad f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

Die Rechnung gibt

$$f(-1) = 1,\quad f(0) = -1,\quad f(1) = -1.$$

Durch Subtraktionen findet man

$$\begin{aligned}
&\Delta f(-1) = -2,\quad \Delta f(0) = 0,\\
&\Delta^2 f(-1) = 2.
\end{aligned}$$

Nach der bewiesenen Formel (Nr. 4) ist aber

$$\Delta^3 f(x) = 6$$

für jedes x.

Die Anwendung der Additionen gibt uns

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 f(0) = 8,\quad \Delta f(1) = 8,\quad f(2) = 7;\\
&\Delta^2 f(1) = 14,\quad \Delta f(2) = 22,\quad f(3) = 29.
\end{aligned}$$

Um $f(-2)$ und $f(-3)$ zu bestimmen, sind folgende Rechnungen auszuführen:

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 f(-2) = -4,\quad \Delta f(-2) = 2,\quad f(-2) = -1;\\
&\Delta^2 f(-3) = -10,\quad \Delta f(-3) = 12,\quad f(-3) = -13.
\end{aligned}$$

Diese Resultate lassen sich in der Tabelle zusammenstellen:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
-3	-13	12	-10	6
-2	-1	2	-4	6
-1	1	-2	2	6
0	-1	0	8	6
1	-1	8	14	
2	7	22		
3	29			

Aus den Vorzeichen von $f(x)$ erkennt man, daß die Gleichung $f(x) = 0$ drei reelle Wurzeln hat, die in den Intervallen $(-2, -1)$, $(-1, 0)$ und $(1, 2)$ liegen.

Diese Methode führt immer zur Absonderung der Wurzeln einer numerischen Gleichung, sobald der absolute Betrag der Differenz zweier Wurzeln kleiner als Eins ist.

8. Relationen zwischen den sukzessiven Werten und Differenzen einer Funktion. Wir stellen uns die Aufgabe, die Werte

$$f(a), \quad \Delta f(a), \quad \Delta^2 f(a), \ldots, \quad \Delta^n f(a)$$

durch

$$f(a), \quad f(a+h), \quad f(a+2h), \ldots, \quad f(a+nh)$$

auszudrücken.

Um die Schreibweise abzukürzen, wollen wir folgende Bezeichnungen einführen:

$$f(a) = u_0, \quad f(a+h) = u_1, \quad f(a+2h) = u_2, \ldots, \quad f(a+nh) = u_n.$$

Die gesuchte Relation kann auf symbolischem Wege gefunden werden.

In der Gleichung

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$$

können symbolisch die Indizes durch Exponenten ersetzt werden. Wenn man aus der Gleichung

$$\Delta u^k = u^{k+1} - u^k$$

den gemeinsamen Faktor u^k wegläßt, so wird

$$\Delta = u - 1.$$

Daraus folgt

$$\Delta^m = u^m - m\,u^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} u^{m-2} - \cdots + (-1)^m.$$

Nach Multiplikation mit u^k und Ersetzen der Exponenten durch Indizes erhält man

$$\Delta^m u_k = u_{k+m} - m\,u_{k+m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} u_{k+m-2} - \cdots + (-1)^m u_k.$$

Diese Formel ist damit zwar gefunden, aber noch nicht bewiesen. Das kann in verschiedener Weise geschehen.

Wenn man in der Gleichung

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$$

a durch $a + h$ ersetzt, so vermehren sich alle Indizes um Eins und es wird

$$\Delta u_{k+1} = u_{k+2} - u_{k+1}.$$

Durch Subtraktion findet man

$$\Delta^2 u_k = u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k.$$

In derselben Weise fährt man weiter fort

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u_{k+1} &= u_{k+3} - 2u_{k+2} + u_{k+1}, \\
\Delta^3 u_k &= (u_{k+3} - 2u_{k+2} + u_{k+1}) - (u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k) \\
&= u_{k+3} - 3u_{k+2} + 3u_{k+1} - u_k, \\
\Delta^3 u_{k+1} &= u_{k+4} - 3u_{k+3} + 3u_{k+2} - u_{k+1}, \\
\Delta^4 u_k &= (u_{k+4} - 3u_{k+3} + 3u_{k+2} - u_{k+1}) - (u_{k+3} - 3u_{k+2} + 3u_{k+1} - u_k) \\
&= u_{k+4} - 4u_{k+3} + 6u_{k+2} - 4u_{k+1} + u_k.
\end{aligned}$$

Damit ist die Richtigkeit der gefundenen Formel für

$$m = 1,\ 2,\ 3 \text{ und } 4$$

bewiesen. Durch vollständige Induktion läßt sich zeigen, daß die Formel allgemein gültig ist.

Wir werden aber einen andern Weg einschlagen. Aus der früheren Betrachtung folgt, daß $\Delta^m u_k$ die Form hat

$$\Delta^m u_k = A_0 u_{k+m} + A_1 u_{k+m-1} + A_2 u_{k+m-2} + \cdots + A_m u_k,$$

weil wir immer mit linearen und homogenen Funktionen der u zu tun haben. Die Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_m$ sind von der Funktion $f(x)$, von a und h unabhängig. Deswegen genügt es, diese Koeffizienten in einem speziellen Falle zu bestimmen.

Wir setzen

$$a = 0, \quad h = 1, \quad f(x) = c^x$$

und finden

$$u_0 = 1, \quad u_1 = c, \quad u_2 = c^2, \ldots, \quad u_{k+m} = c^{k+m},$$

$$\Delta^m u_k = c^k (c-1)^m,$$

$$c^k (c-1)^m = A_0 c^{k+m} + A_1 c^{k+m-1} + A_2 c^{k+m-2} + \cdots + A_m c^k.$$

Folglich ist

$$(c-1)^m = A_0 c^m + A_1 c^{m-1} + A_2 c^{m-2} + \cdots + A_m.$$

Die Koeffizienten A sind aber aus dem binomischen Lehrsatze bekannt.

Es ist also allgemein

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -m, \quad A_2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \ldots, \quad A_m = (-1)^m.$$

Setzt man in der bewiesenen Formel

$$k = 0, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

so erhält man die gewünschten Formeln

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0,$$
$$\Delta^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0,$$
$$\Delta^3 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^n u_0 = u_n - n u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u_{n-2} - \cdots + (-1)^n u_0.$$

9. Jetzt wollen wir zur umgekehrten Aufgabe übergehen. Es sollen die Werte

$$f(a), \quad f(a+h), \quad f(a+2h), \ldots, \quad f(a+nh)$$

durch

$$f(a), \quad \Delta f(a), \quad \Delta^2 f(a), \ldots, \quad \Delta^n f(a)$$

ausgedrückt werden.

Aus der Formel

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$$

folgt

$$u_{k+1} = u_k + \Delta u_k.$$

Symbolisch ist

$$u^{k+1} = u^k + \Delta u^k$$

oder

$$u = 1 + \Delta.$$

Daraus ergibt sich

$$u^m = 1 + m\Delta + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 + \cdots + \Delta^m,$$

$$u^{m+k} = u^k + m \Delta u^k + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u^k + \cdots + \Delta^m u^k,$$

$$u_{m+k} = u_k + m \Delta u_k + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_k + \cdots + \Delta^m u_k.$$

Um diese Formel zu beweisen, beginnen wir mit den Fällen $m = 1, 2, 3$.

Wir haben schon gesehen, daß

$$u_{k+1} = u_k + \Delta u_k.$$

Daraus folgt (Nr. 3)

$$\begin{aligned}
\Delta u_{k+1} &= \Delta u_k + \Delta^2 u_k, \\
u_{k+2} &= (u_k + \Delta u_k) + (\Delta u_k + \Delta^2 u_k) = u_k + 2\Delta u_k + \Delta^2 u_k, \\
\Delta u_{k+2} &= \Delta u_k + 2\Delta^2 u_k + \Delta^3 u_k, \\
u_{k+3} &= (u_k + 2\Delta u_k + \Delta^2 u_k) + (\Delta u_k + 2\Delta^2 u_k + \Delta^3 u_k) \\
&= u_k + 3\Delta u_k + 3\Delta^2 u_k + \Delta^3 u_k.
\end{aligned}$$

Wir haben hier immer lineare und homogene Funktionen von $u_k, \Delta u_k, \Delta^2 u_k, \ldots$, folglich ist

$$u_{k+m} = B_0 u_k + B_1 \Delta u_k + B_2 \Delta^2 u_k + \cdots + B_m \Delta^m u_k,$$

wo die Koeffizienten von der Wahl der Funktion $f(x)$ unabhängig sind.

Für

$$a = 0, \quad h = 1, \quad f(x) = c^x$$

findet man

$$c^{k+m} = B_0 c^k + B_1 c^k (c-1) + B_2 c^k (c-1)^2 + \cdots + B_m c^k (c-1)^m$$

oder

$$c^m = B_0 + B_1 (c-1) + B_2 (c-1)^2 + \cdots + B_m (c-1)^m.$$

Setzt man $c = 1 + t$ ein, so wird

$$(1+t)^m = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \cdots + B_n t^n.$$

Die gesuchten Koeffizienten haben also die Werte

$$B_0 = 1, \quad B_1 = m, \quad B_2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \ldots, \quad B_n = 1.$$

Es bestehen daher die Formeln

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + \Delta u_0, \\
u_2 &= u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0, \\
u_3 &= u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_n &= u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 u_0 + \cdots + \Delta^n u_0.
\end{aligned}$$

Alle diese Formeln können durch die Formel

$$u_z = u_0 + z\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 u_0 + \cdots + \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\Delta^n u_0$$

umfaßt werden. Hier kann z nur die Werte

$$z = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$$

annehmen.

Damit schließen wir dieses Kapitel und gehen zu Anwendungen der bewiesenen Sätze über.

Zweites Kapitel.

Interpolation.

10. Genaue Interpolation. Die einfachste Aufgabe ist die folgende: Es sind die Werte einer ganzen Funktion $f(t)$ von nicht höherem als n^{ten} Grade gegeben

$$f(a), \quad f(a+h), \quad f(a+2h), \ldots, \quad f(a+nh).$$

Es soll der Wert der Funktion für $t = x$ berechnet werden. Diese Aufgabe war schon gelöst für den Fall, daß $\frac{x-a}{h}$ gleich einer ganzen Zahl ist (Nr. 7).

Die bekannten Werte können wir wieder mit

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$$

bezeichnen. Es ist also der Wert der Funktion u_z gegeben für

$$z = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Nach der bewiesenen Formel (Nr. 9) ist

$$u_z = u_0 + z\,\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 u_0 + \cdots + \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\Delta^n u_0$$

für diese Werte von z.

Wenn wir setzen

$$z = \frac{t-a}{h},$$

so ist

$$F(t) = u_0 + \frac{t-a}{h} \cdot \Delta u_0 + \frac{(t-a)(t-a-h)}{1 \cdot 2 \cdot h^2}\Delta^2 u_0 + \cdots$$
$$+ \frac{(t-a)(t-a-h)\ldots(t-a-\overline{n-1}\,h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot h^n}\Delta^n u_0$$

eine ganze Funktion, bei der die Relation

$$F(t) = f(t)$$

für $n+1$ verschiedene Werte von t besteht. Diese Relation muß identisch erfüllt sein, weil die algebraische Gleichung $F(t) - f(t) = 0$ von nicht höherem als n^{ten} Grade nicht mehr als n verschiedene Wurzeln besitzen kann. Wenn wir $t = x$ setzen, so finden wir

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1 \cdot 2 \cdot h^2}\Delta^2 f(a) + \cdots$$
$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n\; h^n}\Delta^n f(a).$$

Das ist die Newtonsche Interpolationsformel, der wir schon früher begegneten (Nr. 4).

11. Andre Aufgaben der Interpolation wollen wir nur für ganze Funktionen von nicht höherem als dem 4ten Grade behandeln.

Es sind Werte einer ganzen Funktion $f(t)$ vom 4ten Grade gegeben

$$f(a), \quad f(a+h), \quad f(a+2h), \quad f(a+3h), \quad f(a+4h).$$

Man soll für $t = x$ den Wert der Funktion und ihrer Ableitungen berechnen.

Nach der Newtonschen Formel ist

$$f(t) = f(a) + \frac{t-a}{h} \cdot \Delta f(a) + \frac{(t-a)(t-a-h)}{1 \cdot 2 h^2} \Delta^2 f(a)$$
$$+ \frac{(t-a)(t-a-h)(t-a-2h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 h^3} \Delta^3 f(a) + \frac{(t-a)(t-a-h)(t-a-2h)(t-a-3h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 h^4} \Delta^4 f(a)$$

für jeden Wert von t.

Der Einfachheit wegen setzen wir $t = a + hz$, die Funktion $f(t)$ verwandelt sich dabei in $F(z)$ und wir finden

$$F(z) = f(a) + \frac{z}{1} \Delta f(a) + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 f(a) + \frac{z(z-1)(z-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 f(a)$$
$$+ \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^4 f(a)$$

oder

$$F(z) = f(a) + z \Delta f(a) + (z^2 - z) \frac{\Delta^2 f(a)}{1 \cdot 2} + (z^3 - 3z^2 + 2z) \cdot \frac{\Delta^3 f(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ (z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 6z) \cdot \frac{\Delta^4 f(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Durch Differentiation erhält man die Formeln

$$F'\ (z) = \Delta f(a) + (2z - 1) \cdot \frac{\Delta^2 f(a)}{1 \cdot 2} + (3z^2 - 6z + 2) \cdot \frac{\Delta^3 f(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ (4z^3 - 18z^2 + 22z - 6) \cdot \frac{\Delta^4 f(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$F''\ (z) = \Delta^2 f(a) + (z-1) \Delta^3 f(a) + (6z^2 - 18z + 11) \cdot \frac{\Delta^4 f(a)}{12},$$

$$F'''\ (z) = \Delta^3 f(a) + (2z - 3) \frac{\Delta^4 f(a)}{2},$$

$$F''''(z) = \Delta^4 f(a).$$

Wenn $z = y$ für $t = x$ ist, so sind die gesuchten Werte

$$f'(x) = \frac{1}{h} F'(y), \quad f''(x) = \frac{1}{h^2} F''(y), \quad f'''(x) = \frac{1}{h^3} F'''(y),$$

$$f^{\text{IV}}(x) = \frac{1}{h^4} F^{\text{IV}}(y).$$

Hier ist y durch $\frac{x-a}{h}$ zu ersetzen.

Es seien z. B. für eine ganze Funktion $f(t)$ von nicht höherem als 3ten Grade die Werte

$$f(0)=1,\quad f(2)=3,\quad f(4)=53,\quad f(6)=199$$

gegeben.

Es soll $f''(1)$ berechnet werden.

In diesem Falle ist

$$a=0,\quad h=2,\quad x=1,\quad y=\frac{1}{2}$$

$$f''(1)=\frac{1}{4}\left[\Delta^2 f(0)-\frac{1}{2}\Delta^3 f(0)\right]$$

$$\Delta^2 f(0)=53-2\cdot 3+1=48,$$

$$\Delta^3 f(0)=199-3\cdot 53+3\cdot 3-1=48,$$

$$f''(1)=\frac{1}{4}(48-24)=6.$$

12. Für eine ganze Funktion 4ten Grades und für $h=1$ seien die Werte

$$f(0),\quad \Delta f(0),\quad \Delta^2 f(0),\quad \Delta^3 f(0),\quad \Delta^4 f(0)$$

gegeben. Es sollen die Werte

$$f\left(\frac{1}{10}\right),\quad f\left(\frac{2}{10}\right),\quad f\left(\frac{3}{10}\right),\ldots,\quad f\left(\frac{9}{10}\right)$$

berechnet werden.

Wenn wir die Bezeichnungen

$$\delta f(a)=f\left(a+\frac{1}{10}\right)-f(a),\quad \delta^2 f(a)=\delta f\left(a+\frac{1}{10}\right)-\delta f(a),\ldots$$

einführen, so ist nach der Newtonschen Formel

$$f\left(\frac{m}{10}\right)=f(0)+m\,\delta f(0)+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\delta^2 f(0)+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\delta^3 f(0)$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\delta^4 f(0).$$

Die Werte $\delta f(0)$, $\delta^2 f(0)$, $\delta^3 f(0)$ und $\delta^4 f(0)$ lassen sich aus der Formel

$$f(t)=f(0)+t\,\Delta f(0)+\frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(0)+\frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 f(0)$$
$$+\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 f(0)$$

bestimmen, die für jedes t gültig ist. Man findet

$$f(0)=f(0),$$

$$f\left(\frac{1}{10}\right)=f(0)+\frac{1}{10}\Delta f(0)-\frac{9}{200}\Delta^2 f(0)+\frac{57}{2000}\Delta^3 f(0)-\frac{1653}{80000}\Delta^4 f(0),$$

$$f\left(\frac{2}{10}\right)=f(0)+\frac{2}{10}\Delta f(0)-\frac{8}{100}\Delta^2 f(0)+\frac{48}{1000}\Delta^3 f(0)-\frac{336}{10000}\Delta^4 f(0),$$

$$f\left(\frac{3}{10}\right)=f(0)+\frac{3}{10}\Delta f(0)-\frac{21}{200}\Delta^2 f(0)+\frac{119}{2000}\Delta^3 f(0)-\frac{3213}{80000}\Delta^4 f(0),$$

$$f\left(\frac{4}{10}\right)=f(0)+\frac{4}{10}\Delta f(0)-\frac{12}{100}\Delta^2 f(0)+\frac{64}{1000}\Delta^3 f(0)-\frac{416}{10000}\Delta^4 f(0).$$

Die Reihe von Subtraktionen gibt

$$\delta f(0) = \frac{1}{10}\Delta f(0) - \frac{9}{200}\Delta^2 f(0) + \frac{57}{2000}\Delta^3 f(0) - \frac{1653}{80000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}\Delta f(0) - \frac{7}{200}\Delta^2 f(0) + \frac{39}{2000}\Delta^3 f(0) - \frac{1035}{80000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta f\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{1}{10}\Delta f(0) - \frac{5}{200}\Delta^2 f(0) + \frac{23}{2000}\Delta^3 f(0) - \frac{525}{80000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{1}{10}\Delta f(0) - \frac{3}{200}\Delta^2 f(0) + \frac{9}{2000}\Delta^3 f(0) - \frac{115}{80000}\Delta^4 f(0).$$

$$\delta^2 f(0) = \frac{1}{100}\Delta^2 f(0) - \frac{9}{1000}\Delta^3 f(0) + \frac{309}{40000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta^2 f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{100}\Delta^2 f(0) - \frac{8}{1000}\Delta^3 f(0) + \frac{255}{40000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta^2 f\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{1}{100}\Delta^2 f(0) - \frac{7}{1000}\Delta^3 f(0) + \frac{205}{40000}\Delta^4 f(0).$$

$$\delta^3 f(0) = \frac{1}{1000}\Delta^3 f(0) - \frac{27}{20000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta^3 f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{1000}\Delta^3 f(0) - \frac{25}{20000}\Delta^4 f(0).$$

$$\delta^4 f(0) = \frac{1}{10000}\Delta^4 f(0).$$

Die gesuchten Formeln sind also

$$\delta f(0) = \frac{1}{10}\Delta f(0) - \frac{9}{200}\Delta^2 f(0) + \frac{57}{2000}\Delta^3 f(0) - \frac{1653}{80000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta^2 f(0) = \frac{1}{100}\Delta^2 f(0) - \frac{9}{1000}\Delta^3 f(0) + \frac{309}{40000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta^3 f(0) = \frac{1}{1000}\Delta^3 f(0) - \frac{27}{20000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta^4 f(0) = \frac{1}{10000}\Delta^4 f(0).$$

Wir haben schon gesehen (Nr. 7), daß die Gleichung

$$\varphi(t) = t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$$

im Intervall $(-2, -1)$ eine Wurzel besitzt. Die Gleichung

$$f(x) = \varphi(-2 + x) = 0$$

hat aber eine Wurzel zwischen 0 und 1.

Nach der angegebenen Methode können die Werte

$$f\left(\frac{1}{10}\right), \quad f\left(\frac{2}{10}\right), \dots, \quad f\left(\frac{9}{10}\right)$$

berechnet werden.

Wir wollen voraussetzen, daß $f\left(\frac{c_1}{10}\right)$ und $f\left(\frac{c_1+1}{10}\right)$ verschiedene Vorzeichen haben. Dann hat die Gleichung $\varphi(t) = 0$ eine Wurzel im Intervall $\left(-2 + \frac{c_1}{10}, -2 + \frac{c_1+1}{10}\right)$.

Jetzt ist in $\varphi(t)$ die Substitution

$$t = -2 + \frac{c_1 + x}{10}$$

anzuwenden. Wir erhalten eine neue Funktion

$$f_1(x) = \varphi\left(-2 + \frac{c_1 + x}{10}\right),$$

die auch eine Wurzel zwischen 0 und 1 besitzt.

Nach demselben Verfahren findet man zwei Zahlen $\frac{c_2}{10}$ und $\frac{c_2+1}{10}$, für die $f_1\left(\frac{c_2}{10}\right)$ und $f_1\left(\frac{c_2+1}{10}\right)$ verschiedene Vorzeichen haben. Die Wurzel der Gleichung $\varphi(t) = 0$ liegt also im Intervall

$$\left(-2 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2}, \quad -2 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2+1}{10^2}\right).$$

Auf diese Weise kann man die Wurzel der Gleichung mit beliebiger Genauigkeit berechnen.

13. Wir wollen jetzt folgende Aufgabe der Interpolation lösen. Es ist eine ganze Funktion 4ten Grades zu bilden, die für

$$f(a),\ f'(a),\ f(a+h),\ f'(a+h),\ f(a+2h)$$

vorgeschriebene Werte besitzt.

Die Funktion

$$F(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2\cdot h^2}\Delta^2 f(a)$$

hat die Eigenschaften

$$F(a) = f(a),\ F(a+h) = f(a+h),\ F(a+2h) = f(a+2h).$$

Dieselben Eigenschaften bestehen auch für

$$\Phi(x) = F(x) + (x-a)(x-a-h)(x-a-2h)\varphi(x);$$

wie auch die Funktion $\varphi(x)$ gewählt wird.

Aus den Forderungen

$$\Phi'(a) = f'(a), \quad \Phi'(a+h) = f'(a+h)$$

lassen sich die Werte $\varphi(a)$ und $\varphi(a+h)$ berechnen. Deswegen ist die Funktion

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{x-a}{h}\Delta\varphi(a)$$

vollständig bestimmt.

Es sollen z. B. die Bedingungen

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f'(1) = 3, \quad f(2) = 7$$

befriedigt werden. In diesem Falle ist

$$\Delta f(0) = 1, \quad \Delta f(1) = 5, \quad \Delta^2 f(0) = 4,$$

$$F(x) = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2}\cdot 4 = 2x^2 - x + 1,$$

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= 2x^2 - x + 1 + x(x-1)(x-2)\varphi(x)\\ &= 2x^2 - x + 1 + (x^3 - 3x^2 + 2x)\varphi(x),\end{aligned}$$

$$\Phi'(x) = 4x - 1 + (x^3 - 3x^2 + 2x)\varphi'(x) + (3x^2 - 6x + 2)\varphi(x),$$

$$\Phi'(0) = -1 + 2\varphi(0) = 1, \quad \varphi(0) = 1,$$

$$\Phi'(1) = 3 - \varphi(1) = 3, \qquad \varphi(1) = 0,$$

$$\varphi(x) = 1 + x\cdot(-1) = -x + 1,$$

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^2 - x + 1 + (x^3 - 3x^2 + 2x)(-x + 1)\\ &= -x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 1.\end{aligned}$$

Wir wollen noch ein Beispiel behandeln. Es soll eine ganze Funktion 3ten Grades die Bedingungen erfüllen

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = 4.$$

Nach dem Taylorschen Satze hat die Funktion

$$F(x) = 1 + (x-1) + 4\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2} = 2x^2 - 3x + 2$$

die Eigenschaften

$$F(1) = 1, \quad F'(1) = 1, \quad F''(1) = 4.$$

Dasselbe gilt auch für

$$\Phi(x) = 2x^2 - 3x + 2 + (x-1)^3\varphi(x)$$

bei willkürlicher Wahl von $\varphi(x)$. Da aber nur eine Bedingung zu erfüllen ist, so können wir $\varphi(x)$ konstant voraussetzen. Es soll $\Phi(0) = 1$ sein, folglich ist

$$2 - \varphi(0) = 1, \quad \varphi(0) = 1$$

und

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2 + (x-1)^3 = x^3 - x^2 + 1.$$

Dieselbe Aufgabe könnte man in andrer Weise lösen.

Den Bedingungen $f(0) = 1$, $f(1) = 1$ genügt die Funktion

$$\Phi(x) = 1 + x(x-1)\varphi(x) = 1 + (x^2 - x)\varphi(x).$$

Die Ableitungen dieser Funktion

$$\Phi'(x) = (x^2 - x)\varphi'(x) + (2x-1)\varphi(x),$$
$$\Phi''(x) = (x^2 - x)\varphi''(x) + 2(2x-1)\varphi'(x) + 2\varphi(x)$$

haben für $x = 1$ die Werte

$$\Phi'(1) = \varphi(1) = 1, \quad \Phi''(1) = 2\varphi'(1) + 2\varphi(1) = 4.$$

Daraus folgt

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi'(1) = 1,$$
$$\varphi(x) = 1 + (x-1) = x,$$
$$f(x) = 1 + (x^2 - x)x = x^3 - x^2 + 1.$$

Ganz ähnlich kann man ganze Funktionen höheren Grades bilden, die vorgeschriebene Werte

$$\begin{array}{llll} f(a), & f'(a), & f''(a), \ldots, & f^{(\alpha-1)}(a), \\ f(a+h), & f'(a+h), & f''(a+h), \ldots, & f^{(\alpha_1-1)}(a+h), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(a+mh), & f'(a+mh), & f''(a+mh), \ldots, & f^{(\alpha_m-1)}(a+mh) \end{array}$$

besitzen. Der Grad dieser Funktion kann nicht die Zahl

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m - 1$$

übersteigen. (Vgl. Markoff, Differenzenrechnung, S. 1—6.)

In den betrachteten Fällen der Interpolation wurde vorausgesetzt, daß die Werte der unabhängigen Variabeln in äquidistanten Intervallen auftreten, weil nur in diesem Falle die Differenzen anzuwenden sind.

14. Angenäherte Interpolation. Für Werte von t, die in einem Intervall liegen, wollen wir die gegebene Funktion $f(t)$ angenähert durch die ganze Funktion $F(t)$ ausdrücken, die gewissen Forderungen genügt. Der Fehler dieser Annäherung soll abgeschätzt werden.

Z. B. soll die ganze Funktion $F(t)$ vom nicht höheren als n^{ten} Grade sein und die Gleichung

$$f(t) = F(t)$$

erfüllen für

$$t = a, \quad a+h, \quad a+2h, \ldots, a+nh.$$

Es ist uns schon bekannt, wie man eine solche ganze Funktion bildet (Nr. 10).

Es sei x eine Zahl, die im gegebenen Intervalle liegt. Wir werden näherungsweise

$$f(x) = F(x)$$

setzen und es ist der Fehler dieser Annäherung abzuschätzen.

Die Funktion

$$f(t) - F(t) - K \cdot \frac{(t-a)(t-a-h)\ldots(t-a-nh)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)}$$

bei beliebigem Werte von K verschwindet für

$$t = a, \quad a+h, \quad a+2h, \ldots, a+nh.$$

Wir wollen K so wählen, daß diese Funktion noch für $t = x$ verschwindet. Hier ist x eine Zahl, die von a, $a+h$, $a+2h, \ldots,$ $a+nh$ verschieden ist.

Die Gleichung

$$\Phi(t) = f(t) - F(t) - K\frac{(t-a)(t-a-h)\ldots(t-a-nh)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)} = 0$$

hat dann mindestens $n+2$ Wurzeln. Nach dem Rolleschen Satz hat die $(n+1)^{\text{te}}$ Ableitung von $\Phi(t)$ mindestens eine Wurzel, die wir mit ξ bezeichnen wollen. Diese Zahl ist eine mittlere zwischen der größten und der kleinsten unter den Zahlen a, $a+nh$ und x.

Es ist aber

$$\Phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - K;$$

folglich ist

$$K = f^{(n+1)}(\xi).$$

Es besteht also die Formel

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1 \cdot 2 \cdot h^2}\Delta^2 f(a) + \cdots$$

$$+\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot h^n}\Delta^n f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-nh)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)} f^{(n+1)}(\xi).$$

Das ist die Newtonsche Interpolationsformel mit dem Restgliede von A. Cauchy (vgl. Cauchy, Oeuvres, 1 série, tome 5, p. 422 oder Comptes rendus, tome 11 [1840], p. 787).

Besonders sind die Fälle zu bemerken

$$n = 0, \quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(\xi),$$

$$n = 1, \quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1 \cdot 2} f''(\xi),$$

$$n = 2, \quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1 \cdot 2 \cdot h^2}\Delta^2 f(a)$$

$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(\xi).$$

Die erste dieser Formeln ist die Lagrangesche.

Durch Weglassung der Restglieder entstehen Näherungsformeln, deren Fehler durch die Restglieder ausgedrückt sind.

15. Wir wollen einen besonderen Fall der Interpolation betrachten. Für $t = x$ soll die gegebene Funktion $f(t)$ angenähert durch eine solche ganze Funktion 3ten Grades $F(t)$ dargestellt werden, daß die Bedingungen

$$F(-1) = f(-1), \quad F(0) = f(0), \quad F'(0) = f'(0), \quad F(1) = f(1)$$

erfüllt seien.

Die Funktion $F(t)$ hat die Form

$$F(t) = f(-1) + \frac{t+1}{1}\Delta f(-1) + \frac{(t+1)t}{1\cdot 2}\Delta^2 f(-1) + \frac{(t+1)t(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3}A,$$

wo die Konstante A sich aus der Bedingung

$$F'(0) = f'(0)$$

bestimmen läßt. Wir finden

$$F'(t) = \Delta f(-1) + \frac{1}{2}(2t+1)\Delta^2 f(-1) + \frac{1}{6}(3t^2-1)A,$$

$$f'(0) = \Delta f(-1) + \frac{1}{2}\Delta^2 f(-1) - \frac{1}{6}A,$$

$$A = 6\Delta f(-1) + 3\Delta^2 f(-1) - 6f'(0),$$

$$A = 6[f(0) - f(-1)] + 3[f(1) - 2f(0) + f(-1)] - 6f'(0).$$

Nach Reduktionen ergibt sich

$$A = 3f(1) - 3f(-1) - 6f'(0).$$

Um die Interpolationsformel mit dem Restgliede zu finden, betrachten wir die Funktion

$$\Phi(t) = f(t) - F(t) - K\frac{(t+1)t^2(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

wo die Konstante K so gewählt ist, daß $\Phi(x)$ gleich Null ist.

Wenn wir die vier Zahlen

$$-1, \quad 0, \quad 1, \quad x$$

der Größe nach ordnen, so entstehen solche vier Zahlen

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4,$$

die den Bedingungen genügen

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

Diese Zahlen genügen der Gleichung $\Phi(t) = 0$. Nach dem Rolleschen Satze hat die Gleichung $\Phi'(t) = 0$ mindestens drei solche Wurzeln b_1, b_2, b_3, daß

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < b_3 < a_4.$$

Keine der Zahlen b_1, b_2 und b_3 ist also gleich Null. Außerdem ist diese Gleichung noch für $t = 0$ befriedigt. Die Gleichung $\Phi'(t) = 0$ hat also mindestens vier verschiedene Wurzeln. Nach dem Rolleschen Satze hat die dritte Ableitung von $\Phi'(t)$ oder $\Phi^{IV}(t)$ mindestens eine Wurzel $t = \xi$, die zwischen a_1 und a_4 liegt. Da aber

$$\Phi^{IV}(t) = f^{IV}(t) - K$$

ist, so ist

$$K = f^{IV}(\xi).$$

Wir haben also die folgende Formel bewiesen

$$f(x) = f(-1) + \frac{x+1}{1}\Delta f(-1) + \frac{(x+1)x}{1\cdot 2}\Delta^2 f(-1) + A\,\frac{(x+1)x(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(x+1)x^2(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^{IV}(\xi).$$

Der Koeffizient A hat den angegebenen Wert.

16. In andern Fällen werden die Restglieder mit Hilfe derselben Betrachtungen gebildet.

Wenn z. B. die Näherungsformel

$$f(t) = F(t)$$

genau ist für

$$t = a,\quad a + h,\quad a + 2h,\quad a + 3h,$$

$$f'(t) = F'(t) \quad \text{für} \quad t = a,\quad a + h,\quad a + 2h,$$

$$f''(t) = F''(t) \quad \text{für} \quad t = a,$$

dann ist $F(t)$ eine ganze Funktion vom 7ten Grade und die Näherungsformel $f(x) = F(x)$ enthält den Fehler

$$\frac{(x-a)^3(x-a-h)^2(x-a-2h)^2(x-a-3h)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}f^{(8)}(\xi).$$

Die Zahl ξ ist zwischen der größten und der kleinsten unter den Zahlen a, $a + 3h$, x enthalten. (Vgl. Markoff, Differenzenrechnung, S. 6—8.)

17. Anwendung der angenäherten Interpolation auf die Berechnung der Wurzeln numerischer Gleichungen. Wir machen die Voraussetzung, daß die numerische Gleichung $f(t) = 0$ im Intervall (a, b) nur eine Wurzel besitzt und daß $f''(t)$ immer dasselbe Vorzeichen in diesem Intervall behält.

Da die Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$ verschieden sind, so ist

$$f(a)\cdot f(b) < 0.$$

Wir werden $f(t)$ näherungsweise durch eine solche lineare Funktion $F(t)$ ausdrücken, für die

$$F(a) = f(a) \quad \text{und} \quad F(b) = f(b).$$

Hier ist $h = b - a$ und deswegen ist

$$F(t) = f(a) + \frac{t-a}{b-a}[f(b) - f(a)].$$

Für $t = x$ wird

$$f(x) = F(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{1 \cdot 2} f''(\xi).$$

Den Wert x wählen wir so, daß $F(x) = 0$ wird. Folglich ist

$$x - a = \frac{(b-a)f(a)}{f(a)-f(b)}, \quad x - b = \frac{(b-a)f(b)}{f(a)-f(b)}, \quad x = \frac{bf(a)-af(b)}{f(a)-f(b)},$$

$$(x-a)(x-b) = \frac{(b-a)^2 f(a) \cdot f(b)}{[f(a)-f(b)]^2} < 0.$$

Es liegt also x zwischen a und b. Für diesen x kann nicht $f''(\xi) = 0$ sein. Die Gleichung

$$\Phi(t) = f(t) - F(t) = 0$$

wäre dann befriedigt für $t = a$, x und b. Nach dem Rolleschen Satze hätte die Gleichung $\Phi'(t) = 0$ mindestens zwei Wurzeln zwischen a und b, und die Funktion

$$\Phi''(t) = f''(t)$$

müßte in diesem Intervall ihr Vorzeichen wechseln, was gegen die Voraussetzung ist.

Weil $F(x) = 0$ ist, so ist

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{1 \cdot 2} f''(\xi).$$

Der betrachtete Wert von x läßt sich einfach durch Determinanten ausdrücken. Es ist

$$x = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ a & b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Wenn t im Intervall (a, b) liegt und

$$f(a)f''(t) > 0$$

ist, so ist $f(a)f''(\xi) > 0$ und folglich

$$f(a)f(x) < 0,$$

da $(x-a)(x-b)$ negativ ist. Die Wurzel der Gleichung $f(t) = 0$ liegt also zwischen a und x.

Wenn wir a und b als erste Annäherungen der Wurzel betrachten, so sind

$$a_1 = a, \quad b_1 = \frac{bf(a)-af(b)}{f(a)-f(b)}$$

zweite Annäherungen.

Es sei

$$f(a)f''(t) < 0, \quad \text{oder} \quad f(b)f''(t) > 0,$$

für Werte von t, die im Intervall (a, b) liegen.

Dann ist

$$f(b)f''(\xi) > 0 \quad \text{und} \quad f(b)f(x) < 0.$$

Die Wurzel von $f(t) = 0$ liegt zwischen b und x. Die zweiten Annäherungen sind in diesem Falle

$$a_1 = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}, \quad b_1 = b.$$

In derselben Weise kann man von a_1 und b_1 zu den folgenden Annäherungen a_2 und b_2 übergehen usw. (Vgl. Weber, Lehrbuch der Algebra, I, § 116.)

18. Anwendung der angenäherten Interpolation auf die Berechnung der Logarithmen und Antilogarithmen. Wir nehmen z. B. eine Tabelle fünfstelliger gewöhnlicher Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1000 bis einschließlich 9999. Mit Hilfe der Werte $\log N$ und $\log (N+1)$ soll $\log (N+x)$ berechnet werden, wobei $0 < x < 1$ ist.

Die Interpolationsformel

$$f(x) = f(0) + x\,\Delta f(0) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} f''(\xi)$$

gibt die Näherungsformel

$$\log (N+x) = \log N + x\,[\log (N+x) - \log N]$$

mit dem Fehler

$$\varepsilon = \frac{x(1-x)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\log e}{(N+\xi)^2}.$$

Es ist

$$x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \leqq \frac{1}{4},$$

$$e < 3 < \sqrt{10}, \quad \log e < \frac{1}{2},$$

$$N + \xi > 10^3.$$

Daraus folgt

$$\varepsilon < \frac{1}{16 \cdot 10^6} \quad \text{oder} \quad \varepsilon < 7 \cdot 10^{-8}.$$

Dieser Fehler hat keinen Einfluß auf die fünfstelligen Logarithmen.

19. Die Berechnung der Antilogarithmen führt auf die Frage: Es sind die Werte gegeben:

$$\log N = a, \quad \log (N+1) = b.$$

Aus der Gleichung

$$\log (N+y) = a + x$$

soll y berechnet werden für einen Wert von x, der zwischen 0 und $b - a$ liegt.

Wir setzen
$$f(x) = N + y = 10^{a+x}.$$

Die Anwendung der Interpolationsformel
$$f(x) = f(0) + \frac{x}{b-a}\Delta f(0) + \frac{x(x-b+a)}{1\cdot 2} f''(\xi)$$
gibt die Näherung
$$y = \frac{x}{b-a}$$
mit dem negativen Fehler
$$\varepsilon = -\frac{x(b-a-x)}{2}\cdot 10^{a+\xi}(l\,10)^2.*$$

Es ist
$$x(b-a-x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2} - x\right)^2 \leqq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Aus der Relation
$$e^{l\,10} = 10$$
folgt
$$l\,10 = \frac{1}{\log e}.$$

Da aber $10^{a+\xi} < 10^b$ ist, so ist
$$-\varepsilon < \frac{1}{2}\cdot 10^b\cdot(\log e)^{-2}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Wenn wir bemerken, daß
$$10^b = N + 1,\quad b - a = \log(N+1) - \log N = \log\left(1 + \frac{1}{N}\right),$$
so finden wir
$$-\varepsilon < \frac{1}{8}(N+1)\cdot(\log e)^{-2}\left[\log\left(1 + \frac{1}{N}\right)\right]^2.$$

Dieser Ausdruck kann noch vereinfacht werden.

Für positive z ist
$$\varphi(z) = \log(1+z) - z\log e < 0,$$
weil $\varphi(0) = 0$ und
$$\varphi'(z) = \frac{\log e}{1+z} - \log e < 0$$
sind. Deswegen ist
$$\log\left(1+\frac{1}{N}\right) < \frac{1}{N}\log e$$
und folglich
$$-\varepsilon < \frac{N+1}{8N^2}.$$

Da aber $N + 1 \leqq 10^4$, $N \geqq 10^3$, so ist die positive Zahl
$$-\varepsilon < 2\cdot 10^{-3}.$$

In diesem Kapitel ist die Interpolation nur als Anwendung der Differenzenrechnung behandelt worden. Ausführliche Mitteilungen über diesen Gegenstand findet man im Referat von J. Bauschinger (Encykl. der Math. Wiss., I, S. 799—820).

* $l\,10$ ist der natürliche Logarithmus von 10.

Drittes Kapitel.

Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale.

20. Einleitende Bemerkungen. Um das Integral $\int_a^b f(x)dx$, wo $a < b$ ist, angenähert zu berechnen, gebraucht man eine der Interpolationsformeln (Nr. 14—16)

$$f(x) = F(x) + \varphi(x) f^{(p)}(\xi).$$

Hier sind $F(x)$ und $\varphi(x)$ rationale ganze Funktionen und ξ ein Mittelwert.

Nach Integration findet man die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx$$

mit dem Fehler

$$\varepsilon = \int_a^b \varphi(x) f^{(p)}(\xi)\,dx.$$

Es ist ξ eine unbekannte Funktion von x; wir wissen nur, daß für $a < x < b$ auch $a < \xi < b$ ist. Der Fehler der Näherungsformel ist nur dann abzuschätzen, wenn die Funktion $\varphi(x)$ für alle x zwischen a und b ihr Vorzeichen behält. Nach einem Satze der Integralrechnung ist dann

$$\varepsilon = f^{(p)}(\eta) \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

wo $a < \eta < b$ ist.

Die Aufgabe ist also auf die Integration ganzer rationaler Funktionen zurückgeführt. Die Rechnungen sind noch einfacher, wenn die Grenzen des bestimmten Integrals -1 und $+1$ sind, z. B.

$$\int_{-1}^{1} (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4)\,dx = 2p_0 + \frac{2}{3} p_2 + \frac{2}{5} p_4.$$

Um die Grenzen des gegebenen Integrals in -1 und $+1$ zu verwandeln, setzen wir

$$x = \psi(t)$$

und es sollen die Bedingungen erfüllt werden

$$\psi(-1) = a, \quad \psi(1) = b.$$

Nach der Newtonschen Interpolationsformel ist

$$x = a + \frac{t+1}{2}(b-a) = \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}.$$

Vermöge dieser Substitution findet man

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \mathfrak{F}(t)dt.$$

In den folgenden Paragraphen werden wir verschiedene Interpolationsformeln anwenden. Daraus entstehen verschiedene Methoden zur Berechnung des gegebenen Integrals.

21. Methode der Rechtecke. In der Formel

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \mathfrak{F}(t)dt,$$

wo

$$f\left[\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right] = \mathfrak{F}(t),$$

setzen wir (Nr. 14)

$$\mathfrak{F}(t) = \mathfrak{F}(-1) + (t+1)\mathfrak{F}'(t_1), \quad (-1 < t_1 < t).$$

Daraus entsteht die Näherungsformel

$$\int_{-1}^{1} \mathfrak{F}(t)dt = 2\mathfrak{F}(-1)$$

mit dem Fehler

$$\int_{-1}^{1}(t+1)\mathfrak{F}'(t_1)dt = \mathfrak{F}'(\tau)\int_{-1}^{1}(t+1)dt = 2\mathfrak{F}'(\tau).$$

Hier ist $-1 < \tau < 1$.

Um die Funktion $f(x)$ einzuführen, bemerken wir, daß

$$\mathfrak{F}'(t) = f'(x)\cdot\frac{b-a}{2}.$$

Wir finden die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a)$$

mit dem Fehler

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(b-a)^2\cdot f'(\xi),$$

wo $a < \xi < b$ ist.

Geometrisch ist das gegebene Integral eine Fläche, die in der Näherungsformel durch ein Rechteck ersetzt wird. Daher rührt der Name der Methode.

Um den Fehler zu vermindern, zerlegen wir das Intervall (a, b) in n gleiche Intervalle. Das Integral verwandelt sich in die Summe

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+\frac{b-a}{n}} f(x)dx + \int_{a+\frac{b-a}{n}}^{a+2\frac{b-a}{n}} f(x)dx + \cdots + \int_{a+\overline{n-1}\frac{b-a}{n}}^{b} f(x)dx.$$

Nachdem wir auf jeden Summanden die Näherungsformel angewandt haben, finden wir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}),$$

wo der Kürze wegen die Bezeichnung

$$y_k = f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

eingeführt ist.

Der Fehler dieser Näherungsformel ist

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{(b-a)^2}{n^2}[f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \cdots + f'(\xi_n)],$$

wo $a + (k-1)\frac{b-a}{n} < \xi_k < a + k\frac{b-a}{n}$ ist.

Diesen Ausdruck kann man vereinfachen.

Es wird vorausgesetzt, daß $f'(x)$ endlich und stetig im Intervall (a, b) ist. Diese Funktion hat dann eine obere Grenze A und eine untere Grenze B.*

Aus der Reihe von Ungleichheiten

$$A \geqq f'(\xi_1) \geqq B, \quad A \geqq f'(\xi_2) \geqq B, \ldots, A \geqq f'(\xi_n) \geqq B$$

folgt

$$nA \geqq f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \cdots + f'(\xi_n) \geqq nB$$

und

$$A \geqq \frac{f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \cdots + f'(\xi_n)}{n} \geqq B.$$

Nach einem Satze von Weierstraß kann $f'(x)$ jeden Wert zwischen A und B annehmen. Deswegen gibt es eine solche Zahl ξ, wofür

$$\frac{f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \cdots + f'(\xi_n)}{n} = f'(\xi).$$

Es ist also

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{n} \cdot f'(\xi).$$

Wenn wir die Interpolationsformel

$$F(t) = F(1) + (t-1)F'(t_1)$$

benutzen und dieselben Rechnungen wiederholen, so finden wir die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

mit dem Fehler

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{n}f'(\xi).$$

* Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, p. 101 et 126.

Wenn $f'(x)$ immer dasselbe Vorzeichen im Intervall (a, b) hat, so ist der Wert von $\int_a^b f(x)dx$ zwischen

$$\frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$

und

$$\frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n)$$

enthalten, weil ε und ε_1 verschiedene Vorzeichen haben.

22. Um das Integral

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \mathfrak{F}(t)dt$$

zu berechnen, kann man nicht die Formel

$$\mathfrak{F}(t) = \mathfrak{F}(0) + t\mathfrak{F}'(t_1)$$

gebrauchen, weil t, der Faktor bei $\mathfrak{F}'(t_1)$, das Vorzeichen im Intervall $(-1, 1)$ wechselt und der Fehler der Näherungsformel nicht abgeschätzt werden kann. Es ist zu setzen („Markoff“, S. 53)

$$\mathfrak{F}(t) = \mathfrak{F}(0) + t\mathfrak{F}'(0) + \frac{t^2}{2}\mathfrak{F}''(t_1)$$

und man findet

$$\int_{-1}^{1} \mathfrak{F}(t)dt = 2\mathfrak{F}(0) + \frac{1}{3}\mathfrak{F}''(\tau).$$

Daraus folgt die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

mit dem Fehler

$$\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi) = \frac{1}{2}\,\frac{(b-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{f''(\xi)}{1\cdot 2}.$$

Um eine genauere Formel zu bekommen, zerlegt man das Intervall (a, b) in n gleiche Intervalle. Wenn man dieselbe Methode wie in Nr. 21 benutzt, so findet man die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \cdots + y_{\frac{2n-1}{2}}\right)$$

mit dem Fehler

$$\varepsilon = \frac{1}{2n^2}\cdot\frac{(b-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{f''(\xi)}{1\cdot 2}.$$

Hier ist wieder

$$y_k = f\left(a + k\cdot\frac{b-a}{n}\right).$$

23. Methode der Trapeze. Zur Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} F(t)\,dt$$

werden wir die Funktion $F(t)$ angenähert durch eine lineare Funktion $\Phi(t)$ ausdrücken, die den Bedingungen genügt

$$\Phi(-1) = F(-1), \quad \Phi(1) = F(1).$$

Dadurch entsteht die Interpolationsformel

$$F(t) = F(-1) + \frac{t+1}{2}[F(1) - F(-1)] + \frac{(t+1)(t-1)}{1\cdot 2} F''(t_1).$$

Die Anwendung derselben gibt

$$\int_{-1}^{1} F(t)\,dt = F(-1) + F(1) - \frac{2}{3} F''(\tau).$$

Daraus folgt die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

mit dem Fehler

$$-\frac{(b-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{f''(\xi)}{1\cdot 2}.$$

Die rechte Seite der Näherungsformel ist der Flächeninhalt eines Trapezes.

Nach Zerlegung des Integrals in n Summanden findet man die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}[(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + \cdots + (y_{n-1} + y_n)],$$

oder

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

mit dem Fehler

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(b-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{f''(\xi)}{1\cdot 2}.$$

Wenn $f''(x)$ dasselbe Vorzeichen hat für alle x zwischen a und b, so haben ε_1 und ε (in Nr. 22) verschiedene Vorzeichen. Deswegen ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ zwischen

$$\frac{b-a}{n}\left(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+y_{\frac{5}{2}}+\cdots+y_{\frac{2n-1}{2}}\right)$$

und

$$\frac{b-a}{2n}\left(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n\right)$$

enthalten.

24. Simpsonsche Formel. Wenn wir die Interpolationsformel (Nr. 15)

$$F(t)=F(-1)+\frac{t+1}{1}\Delta F(-1)+\frac{(t+1)t}{1\cdot 2}\Delta^2 F(-1)$$
$$+A\frac{(t+1)t(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(t+1)t^2(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}F^{\mathrm{IV}}(t_1)$$

anwenden, so wird

$$\int_{-1}^{1}F(t)\,dt=2F(-1)+2\Delta F(-1)+\frac{1}{3}\Delta^2 F(-1)-\frac{1}{90}F^{\mathrm{IV}}(\tau).$$

Es ist aber

$$\Delta F(-1)=F(0)-F(-1),\quad \Delta^2 F(-1)=F(1)-2F(0)+F(-1),$$
$$F^{\mathrm{IV}}(t)=f^{\mathrm{IV}}(x)\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^4.$$

Nach einigen Reduktionen finden wir die Simpsonsche Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

mit dem Fehler

$$-\frac{(b-a)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{f^{\mathrm{IV}}(\xi)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Wenn $f(x)$ eine ganze Funktion vom 3ten oder niedrigeren Grade ist, so ist das Restglied gleich Null und die Simpsonsche Formel ist ganz genau. Z. B.:

$$\int_0^1(2x+3)(2x-1)(2x+5)\,dx=\frac{1}{6}[-3\cdot 5+5\cdot 7]=\frac{15}{3}.$$

Wenn aber $f(x)$ eine andre Funktion ist, so kann man den Fehler verkleinern, nachdem man das gegebene Integral in n Summanden zerlegt hat. Man findet dann die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6n}\left(y_0+4y_{\frac{1}{2}}+2y_1+4y_{\frac{3}{2}}+\cdots+4y_{\frac{2n-1}{2}}+y_n\right)$$

mit dem Fehler

$$\varepsilon=-\frac{1}{n^4}\cdot\frac{(b-a)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{f^{\mathrm{IV}}(\xi)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

In diesem Kapitel haben wir mit geringen Änderungen die Darstellung vom Herrn A. A. Markoff angegeben. (Differenzenrechnung, S. 50—60.)

Wir schließen damit die Anwendungen der Sätze über Differenzen und gehen zu den Summen über.

Zweiter Teil.

Summen.

Erstes Kapitel.

Unbestimmte und bestimmte Summen.

25. Definitionen. Unter Summe von $f(x)$ versteht man eine Funktion $\varphi(x)$, deren Differenz gleich $f(x)$ ist, also

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = f(x).$$

Diese Gleichung bedeutet, daß der Ausdruck $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ so transformiert werden kann, daß er in $f(x)$ übergeht. Dieselbe Relation wird auch bezeichnet durch

$$\varphi(x) = \Sigma f(x).$$

Es ist vorausgesetzt, daß $f(x)$ nicht in der Form $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ gegeben ist. Sonst wäre

$$\varphi(x) = \Sigma[\varphi(x+h) - \varphi(x)]$$

eine reine Identität, die keinen Nutzen haben könnte.

Wir werden untersuchen, ob es möglich ist, daß eine andre Funktion $\psi(x)$ dieselbe Eigenschaft

$$\psi(x+h) - \psi(x) = f(x)$$

hat. Wenn wir $\psi(x) - \varphi(x)$ mit $F(x)$ bezeichnen, so ist

$$\psi(x) = \varphi(x) + F(x)$$

und nach Nr. 3

$$\Delta\psi(x) = \Delta\varphi(x) + \Delta F(x).$$

Es ist also

$$\Delta F(x) = 0 \quad \text{oder} \quad F(x+h) = F(x).$$

Beide Funktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ unterscheiden sich also um eine periodische Funktion mit der Periode h.

Ist $\Phi(x)$ eine beliebige Funktion, für die

$$\Phi(x+h) = \Phi(x) \quad \text{oder} \quad \Delta\Phi(x) = 0,$$

so ist

$$\Delta[\varphi(x) + \Phi(x)] = \Delta\varphi(x) + \Delta\Phi(x) = f(x).$$

Also haben alle Funktionen, deren Differenz gleich $f(x)$ ist, die Form

$$\varphi(x) + \Phi(x),$$

wo $\Phi(x)$ eine willkürliche periodische Funktion mit der Periode h ist.

Um die Aufgabe zu vereinfachen, werden wir von nun an voraussetzen, daß x nur Werte der Reihe

$$a, \quad a + h, \quad a + 2h, \ldots$$

annimmt. Dann ist $\Phi(x)$ eine willkürliche Konstante, die wir mit C bezeichnen werden. Es ist also

$$\Sigma f(x) = \varphi(x) + C.$$

Dieser Ausdruck heißt unbestimmte Summe, weil der Wert von C ganz beliebig ist.

26. Summation einfacher Funktionen. Aus jedem Satz über die Differenz (Nr. 2—6) können wir einen Satz über die Summe herleiten.

Aus der Relation $\Delta x = h$ folgt $\Delta \frac{x}{h} = 1$ und

$$\Sigma 1 = \frac{x}{h} + C.$$

Weil

$$\Delta x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}h) = nhx(x-h)\ldots(x-\overline{n-2}h)$$

ist, so ist

$$\Delta \frac{1}{nh} x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}h) = x(x-h)\ldots(x-\overline{n-2}h)$$

und

$$\Sigma x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-2}h) = \frac{1}{nh} x(x-h)\ldots(x-\overline{n-1}h) + C.$$

Damit man unter dem Summenzeichen n Faktoren hat, ist es zweckmäßig, n durch $n+1$ zu ersetzen. Man findet

$$\Sigma x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}h) = \frac{1}{(n+1)h} x(x-h)\ldots(x-nh) + C.$$

Wir hatten die Formel (Nr. 2)

$$\Delta \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+\overline{n-1}h)} = -nh \cdot \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+nh)}.$$

Im Nenner der rechten Seite sind mindestens zwei Faktoren, weil $n \geq 1$ ist.

Aus dieser Formel folgt

$$\Sigma \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+nh)} = -\frac{1}{nh} \cdot \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+\overline{n-1}h)} + C.$$

Die Funktion unter dem Summenzeichen hat im Nenner mindestens zwei Faktoren.

Wenn wir $n-1$ statt n einsetzen, so entsteht die Formel

$$\Sigma \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+\overline{n-1}\,h)} = -\frac{1}{(n-1)h}\cdot\frac{1}{x(x+h)\ldots(x+\overline{n-2}\,h)} + C.$$

Hier ist $n > 1$. Dem Wert $n = 1$ entspricht eine besondere transzendente Funktion, die wir mit $\Sigma \frac{1}{x}$ bezeichnen.

Die Relation

$$\Delta m^x = m^x(m^h - 1) \quad \text{oder} \quad \Delta \frac{m^x}{m^h - 1} = m^x$$

gibt die Formel

$$\Sigma m^x = \frac{m^x}{m^h - 1} + C.$$

Es ist, wie wir wissen (Nr. 6),

$$\Delta \cos u = -2 \sin \frac{\Delta u}{2} \sin\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right).$$

Wir setzen

$$u = \alpha x + \beta$$

und wählen α und β so, daß

$$u + \frac{\Delta u}{2} = x$$

wird. Aus der Bedingungsgleichung

$$\alpha x + \beta + \frac{\alpha h}{2} = x$$

folgt

$$\alpha = 1, \quad \beta = -\frac{h}{2}.$$

Deswegen ist

$$\Delta \cos\left(x - \frac{h}{2}\right) = -2 \sin \frac{h}{2} \cdot \sin x.$$

Daraus folgt

$$\Delta\left[-\frac{\cos\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}}\right] = \sin x$$

und

$$\Sigma \sin x = -\frac{\cos\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}} + C.$$

Ganz analog findet man die Formel

$$\Sigma \cos x = \frac{\sin\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}} + C.$$

27. Summation zusammengesetzter Funktionen. Wenn A ein konstanter Faktor ist, so ist

$$\Delta A\varphi(x) = A\Delta\varphi(x)$$

oder

$$\Sigma[A\Delta\varphi(x)] = A\varphi(x) + C.$$

Wenn wir $\Delta\varphi(x)$ mit $f(x)$ bezeichnen, so entsteht die Formel

$$\Sigma Af(x) = A\,\Sigma f(x).$$

Die Konstante C ist schon im Ausdrucke $\Sigma f(x)$ enthalten. Wenn wir eine Reihe von Gleichungen haben

$$\Delta\varphi_1(x) = f_1(x), \quad \Delta\varphi_2(x) = f_2(x), \ldots, \quad \Delta\varphi_m(x) = f_m(x),$$

so ist

$$\Delta[\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_m(x)] = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x).$$

Daraus folgt

$$\Sigma[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)] = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_m(x) + C$$

oder

$$\Sigma[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)] = \Sigma f_1(x) + \Sigma f_2(x) + \cdots + \Sigma f_m(x).$$

Mit Hilfe dieser Formel ist es leicht, ganze rationale Funktionen zu summieren.

Es sei

$$f(x) = A_0 + A_1\frac{x-a}{1} + A_2\frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2} + \cdots$$
$$+ A_n\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}.$$

Dann ist

$$\Sigma f(x) = C + A_0\frac{x-a}{h} + A_1\frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2\cdot h} + A_2\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1\cdot 2\cdot 3h}$$
$$+ \cdots + A_n\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-nh)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)\cdot h}.$$

Die Summe einer ganzen Funktion n^{ten} Grades ist also eine ganze Funktion vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade.

Für $h = 1$ ist z. B.

$$x^2 = x + x(x-1), \quad x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$$

und folglich

$$\Sigma x^2 = C + \tfrac{1}{2}x(x-1) + \tfrac{1}{3}x(x-1)(x-2),$$

$$\Sigma x^3 = C + \tfrac{1}{2}x(x-1) + x(x-1)(x-2) + \tfrac{1}{4}x(x-1)(x-2)(x-3).$$

Es ist auch leicht, gebrochene Funktionen von der Form

$$\frac{f(x)}{(x+a)(x+a+h)\ldots(x+a+nh)}$$

zu summieren, wo $f(x)$ eine ganze Funktion ist.

28. Partielle Summation. Aus der Formel

$$\Delta[\varphi(x)\cdot\psi(x)] = \varphi(x)\cdot\Delta\psi(x) + \psi(x+h)\cdot\Delta\varphi(x)$$

folgt

$$\Sigma[\varphi(x)\cdot\Delta\psi(x) + \psi(x+h)\cdot\Delta\varphi(x)] = \varphi(x)\cdot\psi(x) + C$$

oder

$$\Sigma\varphi(x)\cdot\Delta\psi(x) + \Sigma\psi(x+h)\cdot\Delta\varphi(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x) + C.$$

Diese Gleichung liefert die **Formel der partiellen Summation**

$$\Sigma\varphi(x)\cdot\Delta\psi(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)-\Sigma\psi(x+h)\cdot\Delta\varphi(x).$$

Die willkürliche Konstante erscheint, nachdem die Summation auf der rechten Seite ausgeführt ist. Mit Hilfe dieser Formel kann man das Produkt $\varphi(x)\cdot f(x)$ summieren, wenn man einen Wert von $\Sigma f(x)$ kennt, und wenn die Operation $\Sigma\psi(x+h)\cdot\Delta\varphi(x)$ ausführbar ist, wo $\psi(x)=\Sigma f(x)$ ist.

Wir wollen z. B. $\Sigma 3^x\cdot x$ für $h=1$ ausrechnen.

Da ein Wert von $\Sigma 3^x$ gleich $\frac{1}{2}3^x$ ist, so ist

$$\Sigma 3^x\cdot x=\Sigma x\cdot\Delta\left(\frac{1}{2}\cdot 3^x\right)=x\cdot\frac{1}{2}\cdot 3^x-\Sigma\frac{1}{2}\cdot 3^{x+1}\cdot\Delta x$$

$$=\frac{1}{2}x\cdot 3^x-\frac{3}{2}\Sigma 3^x=\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)3^x+C.$$

Es wäre nicht zweckmäßig, die Summation beim Faktor x anzufangen. Da $\Sigma x=\frac{x(x-1)}{2}$ ist, so wäre dann

$$\Sigma 3^x\cdot x=\Sigma 3^x\cdot\Delta\frac{x(x-1)}{2}=3^x\cdot\frac{x(x-1)}{2}-\Sigma\frac{(x+1)x}{2}\Delta 3^x$$

$$=\frac{1}{2}3^x x(x-1)-\Sigma(x+1)x\cdot 3^x,$$

und die gegebene Summe würde auf eine kompliziertere zurückgeführt.

Noch ein Beispiel:

$$\Sigma x\sin x=\Sigma x\cdot\Delta\left[\frac{-\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}\right]=x\cdot\frac{-\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}$$

$$-\Sigma\frac{-\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}\Delta x=-\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}x\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)+\frac{h}{\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^2}\cdot\sin x+C.$$

29. Eigenschaften der bestimmten Summen. Wir haben schon gesehen (Nr. 25), daß, wenn

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=f(x),\qquad \psi(x+h)-\psi(x)=f(x)$$

und x eine Zahl der Reihe

$$a,\quad a+h,\quad a+2h,\ldots$$

ist, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sich durch eine Konstante unterscheiden

$$\varphi(x)=\psi(x)+C.$$

Subtrahiert man voneinander zwei Werte dieser Funktionen für $x = a + nh$ und $x = a + mh$, so fällt C weg. Man findet die Gleichung

$$\varphi(a + nh) - \varphi(a + mh) = \psi(a + nh) - \psi(a + mh).$$

Der Ausdruck $\varphi(a + nh) - \varphi(a + mh)$ bleibt also ungeändert, wenn man $\varphi(x)$ durch einen andern Wert von $\Sigma f(x)$ ersetzt. Dieser Ausdruck heißt **bestimmte Summe** und wird bezeichnet durch

$$\sum_{a+mh}^{a+nh} f(x) = \varphi(a + nh) - \varphi(a + mh).$$

Die Zahlen $a + mh$ und $a + nh$ werden **Grenzen** dieser Summe genannt.

Aus dieser Definition folgt

$$\sum_{a+mh}^{a+mh} f(x) = 0, \qquad \sum_{a+mh}^{a+(m+1)h} f(x) = f(a + mh).$$

Wenn c eine Zahl $a + kh$ ist, die zwischen a und $b = a + nh$ liegt, so ist

$$\sum_{a}^{b} f(x) = \varphi(b) - \varphi(a) = [\varphi(b) - \varphi(c)] + [\varphi(c) - \varphi(a)]$$

oder

$$\sum_{a}^{b} f(x) = \sum_{a}^{c} f(x) + \sum_{c}^{b} f(x).$$

Wenn man diesen Satz mehrmals anwendet, so findet man

$$\sum_{a}^{b} f(x) = \sum_{a}^{a+h} f(x) + \sum_{a+h}^{a+2h} f(x) + \cdots + \sum_{a+\overline{n-1}h}^{b} f(x).$$

Daraus folgt eine wichtige Formel

$$f(a) + f(a + h) + f(a + 2h) + \cdots + f(b - h) = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Hier ist $f(x)$ die gegebene Funktion, $\varphi(x)$ irgend eine Funktion, deren Differenz gleich $f(x)$ ist, $\frac{b-a}{h}$ eine ganze positive Zahl. Diese Formel kann nur dann nützlich sein, wenn $\varphi(x)$ nicht die Form hat

$$f(a) + f(a + h) + f(a + 2h) + \cdots + f(x - h).$$

30. Berechnung einiger bestimmten Summen. 1) Es sei

$$s = a + (a + h) + (a + 2h) + \cdots + (a + \overline{n - 1}h).$$

Wenn wir $a + nh$ mit b bezeichnen, so wird

$$s = \sum_{a}^{b} x.$$

Ein Wert der unbestimmten Summe Σx ist (Nr. 26)

$$\Sigma x = \frac{x(x-h)}{2h};$$

deswegen ist

$$s = \frac{1}{2h}[b(b-h) - a(a-h)]$$

oder nach einigen Reduktionen

$$s = \frac{n}{2}[a + (a + \overline{n-1}h)].$$

2) $$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + 10\cdot 11\cdot 12 = \sum_{3}^{13} x(x-1)(x-2)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10.$$

3) $$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{21\cdot 23} = \sum_{1}^{23}\frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{46} = \frac{11}{23}.$$

4) $$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \sum_{0}^{n} q^x = \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

5) $$1 + \cos h + \cos 2h + \cdots + \cos(n-1)h = \sum_{0}^{nh}\cos x$$
$$= \frac{\sin\frac{2n-1}{2}h + \sin\frac{h}{2}}{2\sin\frac{h}{2}}.$$

Wenn wir von beiden Seiten $\frac{1}{2}$ abziehen, so finden wir

$$\frac{1}{2} + \cos h + \cos 2h + \cdots + \cos(n-1)h = \frac{\sin\frac{2n-1}{2}h}{2\sin\frac{h}{2}}.$$

6) $$\sin h + \sin 2h + \cdots + \sin(n-1)h = \sum_{0}^{nh}\sin x = \frac{\cos\frac{h}{2} - \cos\frac{2n-1}{2}h}{2\sin\frac{h}{2}}.$$

7) Wir wollen jetzt mit Anwendung von Formeln in Nr. 27 die Summen von Potenzen natürlicher Zahlen berechnen.

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (x-1) = \sum_{0}^{x} x = \frac{x(x-1)}{2}.$$

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (x-1)^2 = \sum_{0}^{x} x^2 = \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$$
$$= \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}.$$

$$0^3+1^3+2^3+\cdots+(x-1)^3=\sum_0^x x^3=\frac{1}{2}x(x-1)+x(x-1)(x-2)$$
$$+\frac{1}{4}x(x-1)(x-2)(x-3)=\left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2.$$

Daraus folgt die bemerkenswerte Relation

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(x-1)^3=[1+2+3+\cdots+(x-1)]^2.*$$

Wenn wir $\frac{x^2}{1\cdot 2}$ und $\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ statt x^2 und x^3 summieren, so finden wir

$$\sum_0^x \frac{x}{1}=\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{1}{2}\cdot x=\frac{x(x-1)}{1\cdot 2},$$

$$\sum_0^x \frac{x^2}{1\cdot 2}=\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{1}{12}x=\frac{x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\sum_0^x \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{12}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2}=\frac{x^2(x-1)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Im nächsten Kapitel werden wir die Funktion betrachten

$$\sum_0^x \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}=\varphi_n(x),$$

die, abgesehen von einem konstanten Faktor, von Jacob Bernoulli eingeführt ist.

Zweites Kapitel.

Die Jacob Bernoullische Funktion.

31. Bestimmung der Koeffizienten. Nach dem in Nr. 27 bewiesenen Satze ist die Jacob Bernoullische Funktion

$$\sum_0^x \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}=\varphi_n(x) \tag{1}$$

eine ganze Funktion n^{ten} Grades, die wir in der Form

$$\varphi_n(x)=A_0\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}+A_1\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}+A_2\frac{x^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)}+\cdots+A_{n-1}x \tag{2}$$

schreiben werden. Das konstante Glied fehlt, weil $\varphi_n(0)=0$ ist. Denn in Nr. 29 haben wir gesehen, daß die bestimmte Summe gleich Null ist, wenn ihre Grenzen einander gleich sind. Wir wollen die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ bestimmen.

* Vgl. Encykl. der Math. Wiss., Bd. I, p. 579.

Da

$$\varphi_n(x+1) = \sum_0^{x+1} \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)} = \sum_0^{x} \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)} + \sum_x^{x+1} \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}$$

ist, so besteht die Relation

$$\varphi_n(x+1) - \varphi_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}, \tag{3}$$

die nur für ganze positive x bewiesen ist. Die ganze Funktion

$$F(x) = \varphi_n(x+1) - \varphi_n(x) - \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}$$

vom nicht höheren als n^{ten} Grade verschwindet für jeden ganzen positiven Wert von x. Also ist $F(x)$ identisch gleich Null und die Relation (3) besteht für jedes x.

Wenn eine andre ganze Funktion $\psi(x)$ die Eigenschaften

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}, \quad \psi(0) = 0$$

hat, so ist $\psi(x)$ mit $\varphi_n(x)$ identisch, weil beide Funktionen vom n^{ten} Grade (Nr. 4) sind und außerdem die Gleichungen

$$\psi(0) = \varphi(0), \quad \psi(1) = \varphi(1), \quad \psi(2) = \varphi(2), \ldots, \psi(n) = \varphi(n)$$

bestehen. Die Werte $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)$ bestimmen sich sukzessive aus der Gleichung (3).

Durch die Differentiation von (3) findet man

$$\varphi_n'(x+1) - \varphi_n'(x) = \frac{x^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)}.$$

Nach der Gleichung (2) ist $\varphi_n'(0) = A_{n-1}$. Deswegen ist $\varphi_n'(x) - A_{n-1}$ eine ganze Funktion, die für $x = 0$ verschwindet und deren Differenz gleich $\frac{x^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)}$ ist. Folglich ist für $n > 1$

$$\varphi_n'(x) - A_{n-1} = \varphi_{n-1}(x)$$

oder

$$\varphi_n'(x) = \varphi_{n-1}(x) + A_{n-1}. \tag{4}$$

Aus dieser Relation schließen wir, daß

$$\varphi_{n-1}(x) = A_0 \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)} + A_1 \frac{x^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)} + \cdots + A_{n-2}x$$

ist, und daß die Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_{n-2}$ hier dieselben sind, wie in der Gleichung (2).

Wenn wir in (3) $x = 0$ setzen, so finden wir $\varphi_n(1) = 0$ oder

$$\frac{A_0}{1\cdot 2\ldots n} + \frac{A_1}{1\cdot 2\ldots(n-1)} + \frac{A_2}{1\cdot 2\ldots(n-2)} + \cdots + \frac{A_{n-2}}{1\cdot 2} + A_{n-1} = 0. \tag{5}$$

Diese Relation gibt die Möglichkeit, A_{n-1} zu berechnen, sobald die Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_{n-2}$ bekannt sind.

Aus der Definition

$$\varphi_2(x) = \sum_0^x x$$

folgt, daß

$$\varphi_2(x) = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2}x$$

ist. Deswegen ist

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -\frac{1}{2}.$$

Die Gleichung (5) für $n = 3$, 4 und 5 gibt

$$\frac{A_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A_1}{1 \cdot 2} + A_2 = 0,$$

$$\frac{A_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{A_1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A_2}{1 \cdot 2} + A_3 = 0,$$

$$\frac{A_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{A_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{A_2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A_3}{1 \cdot 2} + A_4 = 0.$$

Daraus findet man

$$A_2 = \frac{1}{12}, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = -\frac{1}{720}.$$

In dieser Weise kann man beliebig viele Koeffizienten berechnen.

32. Eigenschaften der Koeffizienten. Wenn man in der Relation

$$\varphi_{2k+1}(1+x) - \varphi_{2k+1}(x) = \frac{x^{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2k}$$

x durch $-x$ ersetzt, so findet man

$$\varphi_{2k+1}(1-x) - \varphi_{2k+1}(-x) = \frac{x^{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2k}. \tag{6}$$

Wenn man die Bezeichnung

$$-\varphi_{2k+1}(1-x) = F(x)$$

einführt, so ist

$$-\varphi_{2k+1}(-x) = -\varphi_{2k+1}[1-(x+1)] = F(x+1).$$

Die Gleichung (6) nimmt die Form an

$$F(x+1) - F(x) = \frac{x^{2k}}{1 \cdot 2 \ldots 2k}.$$

Da aber $F(0) = 0$ ist, so ist nach dem in Nr. 31 bewiesenen Satze $F(x) = \varphi_{2k+1}(x)$ oder

$$\varphi_{2k+1}(1-x) = -\varphi_{2k+1}(x). \tag{7}$$

Vergleicht man die Ableitungen der beiden Seiten dieser Gleichung, so findet man mit Berücksichtigung der Gleichung (4)

$$-[\varphi_{2k}(1-x)+A_{2k}]=-[\varphi_{2k}(x)+A_{2k}]$$

oder

$$\varphi_{2k}(1-x)=\varphi_{2k}(x). \tag{8}$$

Für $k=1$ ist die Ableitung von $\varphi_{2k}(x)$ keine Jacob Bernoullische Funktion, weil die Definitionsgleichung (1) in Nr. 31 für $n=1$ keinen Sinn hat. Aus der Differentiation von (8) folgt für $k>1$

$$-[\varphi_{2k-1}(1-x)+A_{2k-1}]=\varphi_{2k-1}(x)+A_{2k-1}$$

oder nach (7)

$$-A_{2k-1}=A_{2k-1}.$$

Es ist also

$$A_{2k-1}=0 \text{ für } k>1. \tag{9}$$

Wir haben schon in Nr. 31 gesehen, daß A_1 nicht Null ist, und daß $A_3=0$ ist. Jetzt überzeugen wir uns, daß $A_5=0$, $A_7=0,\ldots$ sind.

33. Das Vorzeichen von $\varphi_n(x)$ im Intervall (0, 1). Wenn man in (7) $x=\frac{1}{2}$ setzt, so findet man

$$\varphi_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

Wir wollen untersuchen, ob für $k>1$ die Gleichung $\varphi_{2k+1}(x)=0$ noch eine Wurzel im Intervall (0, 1) hat.

Es sei vorausgesetzt, daß diese Gleichung außer 0 und 1 noch die Wurzeln a_1 und a_2 besitzt, die den Ungleichheiten

$$0<a_1<a_2<1$$

genügen. Hier darf a_1 oder a_2 gleich $\frac{1}{2}$ genommen werden. Nach dem Rolleschen Satze hat $\varphi'_{2k+1}(x)=0$ mindestens drei Wurzeln b_1, b_2 und b_3, die den Ungleichheiten genügen

$$0<b_1<a_1<b_2<a_2<b_3<1.$$

Die Gleichung $\varphi''_{2k+1}(x)=0$ hat mindestens zwei Wurzeln c_1 und c_2, die zwischen 0 und 1 liegen.

Es ist aber

$$\varphi''_{2k+1}(x)=\varphi_{2k-1}(x),$$

weil $A_{2k-1}=0$ ist. Die Gleichung $\varphi_{2k-1}(x)=0$ hat außerdem die Wurzeln 0 und 1.

Aus der Voraussetzung, daß die Gleichung $\varphi_{2k+1}(x)=0$ zwischen 0 und 1 zwei Wurzeln hat, folgt also, daß die Gleichung $\varphi_{2k-1}(x)=0$

in demselben Intervall auch zwei Wurzeln hat. Wenn wir diesen Schluß mehrmals anwenden, so finden wir, daß $\varphi_3(x)$ zwischen 0 und 1 zwei Wurzeln hat. Das ist aber unmöglich, weil die Funktion 3ten Grades $\varphi_3(x)$ nicht für vier verschiedene Werte von x (0 und 1 inbegriffen) verschwinden kann.

Es ist also bewiesen, daß die Gleichung $\varphi_{2k+1}(x) = 0$ zwischen 0 und 1 nur eine Wurzel $x = \frac{1}{2}$ hat.

Wir wollen jetzt die Gleichung $\varphi_{2k}(x) = 0$ untersuchen. Wenn diese Gleichung zwischen 0 und 1 die Wurzel a hat, so folgt nach dem Rolleschen Satze, daß die Gleichung $\varphi'_{2k}(x) = 0$ mindestens zwei Wurzeln zwischen 0 und 1 hat. Das ist aber unmöglich, weil $\varphi'_{2k}(x) = \varphi_{2k-1}(x)$ ist und wir eben bewiesen haben, daß $\varphi_{2k-1}(x)$ nicht für zwei Werte zwischen 0 und 1 verschwinden kann.

Es besteht also der Satz: Für alle Werte von x zwischen 0 und 1 hat die Funktion $\varphi_{2k}(x)$ dasselbe Vorzeichen.

Um dieses Vorzeichen zu bestimmen, betrachten wir die Gleichung $\varphi_{2k+1}(x) = 0$, die befriedigt wird für $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$. Nach dem Rolleschen Satze hat die Gleichung

$$\varphi'_{2k+1}(x) = \varphi_{2k}(x) + A_{2k} = 0$$

mindestens eine Wurzel $x = \alpha$, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt.

Aus der Relation

$$\varphi_{2k}(\alpha) + A_{2k} = 0$$

folgt, daß A_{2k} nicht gleich Null sein kann, weil $\varphi_{2k}(x)$ nicht im Intervall (0, 1) verschwinden kann, und daß in demselben Intervall $\varphi_{2k}(x)$ das entgegengesetzte Vorzeichen hat, als A_{2k}.

Es ist aber

$$\varphi_{2k}(x) = \frac{x^{2k}}{1 \cdot 2 \ldots 2k} + A_1 \frac{x^{2k-1}}{1 \cdot 2 \ldots (2k-1)} + A_2 \frac{x^{2k-2}}{1 \cdot 2 \ldots (2k-2)}$$
$$+ A_4 \frac{x^{2k-4}}{1 \cdot 2 \ldots (2k-4)} + \cdots + A_{2k-2} \frac{x^2}{1 \cdot 2}.$$

Nach einem Satze der Algebra hat $\varphi_{2k}(x)$ für kleine positive Werte von x dasselbe Vorzeichen wie das Glied $A_{2k-2} \frac{x^2}{1 \cdot 2}$ oder wie A_{2k-2}.

Die Koeffizienten A_{2k-2} und A_{2k} haben also verschiedene Vorzeichen. Da aber $A_2 = \frac{1}{12} > 0$ ist, so ist

$$A_4 < 0, \quad A_6 > 0, \quad A_8 < 0, \ldots$$

Also ist

$$(-1)^{k-1} A_{2k} > 0,$$

und für $0 < x < 1$ besteht die Ungleichheit

$$(-1)^k \varphi_{2k}(x) > 0.$$

Die Funktion $\varphi_{2k+1}(x)$ wechselt ihr Vorzeichen im Intervall (0, 1), weil $x = \frac{1}{2}$ eine einfache Wurzel der Gleichung $\varphi_{2k+1}(x) = 0$ ist. Um diese Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, daß

$$\varphi'_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) + A_{2k} = 0$$

sei. Die Funktion $\varphi_{2k}(x) + A_{2k}$ verschwindet für $x = \alpha$ und $x = \frac{1}{2}$. Nach dem Rolleschen Satze soll

$$[\varphi_{2k}(x) + A_{2k}]' = \varphi_{2k-1}(x)$$

verschwinden für einen Wert von x zwischen α und $\frac{1}{2}$, was unmöglich ist.

34. Bernoullische Zahlen. Die Koeffizienten $A_2, A_4, A_6, \ldots$ werden oft durch die Zahlen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ ausgedrückt, die man Bernoullische Zahlen nennt. Es sind Zahlen, die mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$, als Koeffizient von x in der ersten Potenz, in den Ausdrücken für

$$\sum_0^x x^2, \quad \sum_0^x x^4, \quad \sum_0^x x^6, \ldots$$

auftreten.

Es ist

$$\sum_0^x x^2 = 1 \cdot 2 \varphi_3(x) = 1 \cdot 2 A_2 x - x^2 + \frac{x^3}{3},$$

$$\sum_0^x x^4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \varphi_5(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 A_4 x + \cdots$$

$$\sum_0^x x^6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \varphi_7(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 A_6 x + \cdots$$

Es wird daher gesetzt

$$1 \cdot 2 A_2 = B_1, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 A_4 = -B_2, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 A_6 = B_3, \ldots$$

Allgemein ist

$$1 \cdot 2 \cdots 2k \cdot A_{2k} = (-1)^{k-1} B_k$$

oder

$$A_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} B_k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2k}. \tag{10}$$

Die ersten Bernoullischen Zahlen sind

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \cdots$$

Die Tabelle der 62 ersten B findet man bei J. C. Adams im Journal für Mathematik, Bd. 85 (1878), S. 269—272. Die ersten 20 Zahlen sind im Lehrbuch von A. A. Markoff abgedruckt (S. 125).

Auf die arithmetischen Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen gehen wir hier nicht ein.*

35. Entwicklung von $\varphi_{2k}(x)$ in eine trigonometrische Reihe. Aus der Theorie der trigonometrischen Reihe (L. Dirichlet, Werke, Bd. I, S. 119—132) folgt, daß für

$$0 \leqq x \leqq 1$$

die Entwicklung

$$\varphi_{2k}(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos 2\pi x + a_2 \cos 4\pi x + \cdots + a_n \cos 2n\pi x + \cdots$$
$$+ b_1 \sin 2\pi x + b_2 \sin 4\pi x + \cdots + b_n \sin 2n\pi x + \cdots$$

besteht. Die Koeffizienten haben die Werte

$$a_n = 2\int_0^1 \varphi_{2k}(x) \cos 2n\pi x \cdot dx, \quad b_n = 2\int_0^1 \varphi_{2k}(x) \sin 2n\pi x \cdot dx.$$

Wenn wir $x = 1 - y$ im Ausdruck für b_n einsetzen, so wird wegen der Relation (8) in Nr. 32

$$b_n = -2\int_0^1 \varphi_{2k}(y) \sin 2n\pi y \cdot dy.$$

Folglich ist $b_n = -b_n$ oder $b_n = 0$.

Der Wert für

$$a_0 = 2\int_0^1 \varphi_{2k}(x)dx$$

läßt sich aus der Relation

$$\varphi'_{2k+1}(x) = \varphi_{2k}(x) + A_{2k}$$

bestimmen. Man findet

$$\frac{1}{2} a_0 = \int_0^1 \varphi_{2k}(x)dx = -A_{2k}.$$

Um a_n zu berechnen, werden wir das Integral

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(x) \cos 2n\pi x \cdot dx \quad \text{durch} \quad \int_0^1 \varphi_{2k-2}(x) \cos 2n\pi x \cdot dx$$

ausdrücken. Zu diesem Zweck gebrauchen wir die Formel

* Diesem Gegenstand ist der dritte Abschnitt des Werkes von Herrn L. Saalschütz gewidmet (Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen ... Berlin 1893).

$$(11) \qquad \int \varphi \psi'' dx = \varphi \psi' - \varphi' \psi + \int \psi \varphi'' dx,$$

die eine Folge der zweimaligen partiellen Integration ist.

Setzt man in (11)

$$\varphi = \varphi_{2k}(x), \qquad \psi'' = \cos 2n\pi x,$$

so findet man für $k > 1$

$$\varphi' = \varphi_{2k-1}(x), \qquad \psi' = \frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi},$$

$$\varphi'' = \varphi_{2k-2}(x) + A_{2k-2}, \quad \psi = -\frac{\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^2}.$$

Da aber

$$\int_0^1 \cos 2n\pi x \cdot dx = 0$$

ist, so wird

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(x) \cos 2n\pi x \cdot dx = \frac{-1}{(2n\pi)^2} \int_0^1 \varphi_{2k-2}(x) \cos 2n\pi x \cdot dx.$$

Wenn man diese Formel $(k-1)$ mal anwendet, so erhält man

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(x) \cos 2n\pi x \cdot dx = \frac{(-1)^{k-1}}{(2n\pi)^{2k-2}} \int_0^1 \varphi_2(x) \cos 2n\pi x \cdot dx.$$

Es sei jetzt in (11)

$$\varphi = \varphi_2(x), \qquad \psi'' = \cos 2n\pi x.$$

Daraus folgt

$$\varphi' = x - \frac{1}{2}, \qquad \psi' = \frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi},$$

$$\varphi'' = 1, \qquad \psi = -\frac{\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^2}$$

und

$$\int_0^1 \varphi_2(x) \cos 2n\pi x \cdot dx = \frac{1}{(2n\pi)^2}.$$

Man findet also

$$a_n = \frac{(-1)^{k-1} 2}{(2n\pi)^{2k}}.$$

Wenn man in der Entwicklung

$$\varphi_{2k}(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos 2\pi x + a_2 \cos 4\pi x + \cdots$$

x gleich Null setzt, so findet man die bemerkenswerte Formel von Euler

$$(12) \qquad A_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} 2}{(2\pi)^{2k}} \left[1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots\right].$$

Diese Formel wird später benutzt, um die Konvergenz einiger Reihen zu untersuchen.

Aus den Werten für A_2 und A_4 folgen die Formeln

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

Dieses Kapitel habe ich unter dem Einfluß von W. G. Imschenetzky (Kasaner Universitäts-Nachrichten 1870 und französisch in J. Hoüel, Cours de calcul infinitésimal, Paris 1888, Bd. 1, S. 476) und Herrn N. J. Sonin (Warschauer Universitäts-Nachrichten 1888 und französisch im Journal für Mathematik, Bd. 116 (1896), S. 133) bearbeitet.

Drittes Kapitel.

Eulersche Summationsformel.

36. Eulersche Formel für ganze Funktionen. Es sei

$$f(x)=p_0\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}+p_1\frac{x^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)}+\cdots+p_{n-2}x+p_{n-1}.$$

Wenn man diese Funktion von 0 bis x summiert, so findet man

$$\sum_0^x f(x)=p_0\varphi_n(x)+p_1\varphi_{n-1}(x)+\cdots+p_{n-2}\varphi_2(x)+p_{n-1}x.$$

Hier treten Bernoullische Funktionen ein. Wir wollen dieselben vollständig ausdrücken und die Glieder nach den Koeffizienten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ anordnen.

In dieser Weise entsteht die Formel

$$\begin{aligned}\sum_0^x f(x)&=p_0\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}+p_1\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}+\cdots+p_{n-2}\frac{x^2}{1\cdot 2}+p_{n-1}x\\&+A_1\left(p_0\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}+p_1\frac{x^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)}+\cdots+p_{n-2}x\right)\\&+A_2\left(p_0\frac{x^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)}+p_1\frac{x^{n-3}}{1\cdot 2\ldots(n-3)}+\cdots+p_{n-3}x\right)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+A_{n-2}\left(p_0\frac{x^2}{1\cdot 2}+p_1x\right)\\&+A_{n-1}p_0x\end{aligned}$$

oder

$$(1)\left\{\begin{aligned}\sum_0^x f(x) = \int_0^x f(x)dx + A_1[f(x) - f(0)] + A_2[f'(x) - f'(0)] \\ + A_{n-2}[f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(0)] + A_{n-1}[f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(0)].\end{aligned}\right.$$

Das ist die **Eulersche Summationsformel.** Sie ist genau für ganze Funktionen vom $(n-1)^{\text{ten}}$ oder niedrigeren Grade.

37. Restglied der Eulerschen Formel. Wir wollen die Funktion

$$(2)\left\{\begin{aligned}\psi(x) = \sum_0^x f(x) - \int_0^x f(x)dx - A_1[f(x) - f(0)] - A_2[f'(x) - f'(0)] - \cdots \\ \cdots - A_{n-2}[f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(0)] - A_{n-1}[f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(0)]\end{aligned}\right.$$

ausdrücken in dem Falle, daß $f(x)$ keine ganze Funktion vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist.

Die Differenz von $\psi(x)$ ist

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}\Delta\psi(x) = f(x) - \Delta\int_0^x f(x)dx - A_1\Delta f(x) - A_2\Delta f'(x) - \cdots \\ \cdots - A_{n-2}\Delta f^{(n-3)}(x) - A_{n-1}\Delta f^{(n-2)}(x).\end{aligned}\right.$$

Aus der Integralrechnung ist bekannt, daß

$$\Delta F(x) = F(x+1) - F(x) = F'(x) + \frac{1}{1\cdot 2}F''(x) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}F'''(x) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}F^{(m)}(x) + \int_0^1 \frac{(1-u)^m}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}F^{(m+1)}(x+u)du$$

ist.

Nachdem wir sukzessive

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx, \qquad f(x), \qquad f'(x), \ \ldots, \ f^{(n-2)}(x)$$

$$m = n, \qquad\qquad n-1, \qquad n-2, \ \ldots, \qquad 1$$

gesetzt haben, so verwandelt sich (3) in

$$\Delta\psi(x) = f(x)$$

$$-f(x) - \frac{1}{1\cdot 2}f'(x) - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f''(x) - \cdots - \frac{1}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n-1)}(x) - \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(x+u)\,du$$

$$-A_1 f'(x) - \frac{A_1}{1\cdot 2}f''(x) - \cdots - \frac{A_1}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x) - \int_0^1 \frac{A_1(1-u)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+u)\,du$$

$$-A_2 f''(x) - \cdots - \frac{A_2}{1\cdot 2\ldots(n-2)}f^{(n-1)}(x) - \int_0^1 \frac{A_2(1-u)^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)}f^{(n)}(x+u)\,du$$

. . . .

$$-A_{n-1}f^{(n-1)}(x) - \int_0^1 A_{n-1}(1-u)f^{(n)}(x+u)\,du$$

oder

$$\Delta\psi(x) = -\varphi_2(1)f'(x) - \varphi_3(1)f''(x) - \cdots$$
$$- \varphi_n(1)f^{(n-1)}(x) - \int_0^1 \varphi_n(1-u)f^{(n)}(x+u)\,du.$$

Da die Werte $\varphi_2(1), \varphi_3(1), \ldots, \varphi_n(1)$ gleich Null sind, so ist

$$\Delta\psi(x) = -\int_0^1 \varphi_n(1-u)f^{(n)}(x+u)\,du.$$

Nach der Formel (2) ist $\psi(0) = 0$ und folglich

$$\psi(x) = -\int_0^1 \varphi_n(1-u)\sum_0^x f^{(n)}(x+u)\,du. \tag{4}$$

Es wird hier nach x summiert und nach u integriert.
Wir werden $n = 2k$ setzen. Wegen der Relation

$$\varphi_{2k}(1-u) = \varphi_{2k}(u)$$

ist dann

$$\psi(x) = -\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^x f^{(2k)}(x+u). \tag{5}$$

Das ist das Restglied von **Jacobi** (Journal für Math., Bd. 12 (1834), p. 263 oder Werke, Bd. 6, p. 64).

Wenn man in (5) die Bernoullische Funktion $\varphi_{2k}(u)$ durch die trigonometrische Reihe (Nr. 35) ausdrückt, so findet man das Restglied von Poisson (Pariser Mémoires, Bd. 6 (1826), p. 580). Wir werden die Jacobische Form gebrauchen.

Die Funktion $\varphi_{2k}(u)$ behält ihr Vorzeichen im Intervall zwischen 0 und 1. Deswegen folgt aus (5)

$$\psi(x) = -\sum_0^x f^{(2k)}(x+\theta) \cdot \int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du,$$

wo $0 < \theta < 1$ ist.

Da aber

$$\varphi'_{2k+1}(u) = \varphi_{2k}(u) + A_{2k},$$

so ist

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du = -A_{2k}$$

und folglich

$$\psi(x) = A_{2k} \sum_0^x f^{(2k)}(x+\theta). \tag{6}$$

Wir haben also bewiesen, daß für jede Funktion $f(x)$, die gewissen Stetigkeitsbedingungen genügt, die Formel besteht

$$\tag{7} \left\{ \begin{aligned} & f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(x-1) \\ & = \int_0^x f(x)\,dx + A_1[f(x) - f(0)] + A_2[f'(x) - f'(0)] + \cdots \\ & + A_{2k-2}[f^{(2k-3)}(x) - f^{(2k-3)}(0)] + A_{2k-1}[f^{(2k-2)}(x) - f^{(2k-2)}(0)] \\ & + A_{2k}[f^{(2k)}(\theta) + f^{(2k)}(\theta+1) + \cdots + f^{(2k)}(\theta + x - 1)]. \end{aligned} \right.$$

Für $x = 1$ ist

$$\tag{8} \left\{ \begin{aligned} f(0) = & \int_0^1 f(x)\,dx + A_1[f(1) - f(0)] + A_2[f'(1) - f'(0)] + \cdots \\ & A_{2k-2}[f^{(2k-3)}(1) - f^{(2k-3)}(0)] \\ & + A_{2k-1}[f^{(2k-2)}(1) - f^{(2k-2)}(0)] + A_{2k} f^{(2k)}(\theta). \end{aligned} \right.$$

Die Glieder mit A_{2k-1} fallen weg, sobald $k > 1$ ist (Nr. 32, Form. 9). Für $k = 1$ ist

$$(9)\quad \begin{cases} \qquad f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(x-1) \\ = \int\limits_0^x f(x)dx + A_1[f(x) - f(0)] \\ + A_2[f''(\theta) + f''(\theta+1) + f''(\theta+2) + \cdots + f''(\theta+x-1)] \end{cases}$$

und

$$(10)\qquad f(0) = \int\limits_0^1 f(x)dx + A_1[f(1) - f(0)] + A_2 f''(\theta).$$

38. Andre Form des Restgliedes. Wenn die Ableitungen $f^{(2k)}(t)$ und $f^{(2k+2)}(t)$ für Werte von t zwischen 0 und x ihre Vorzeichen behalten und dieselben Vorzeichen haben, kann das Restglied (6) eine andre Form annehmen.

In der Formel

$$\int \varphi\omega'' du = \varphi\omega' - \varphi'\omega + \int \omega\varphi'' du$$

setzen wir

$$\varphi = \sum_0^x f^{(2k)}(x+u), \qquad \omega'' = \varphi_{2k}(u) + A_{2k}.$$

Dann wird

$$\varphi' = \sum_0^x f^{(2k+1)}(x+u), \quad \omega' = \varphi_{2k+1}(u),$$

$$\varphi'' = \sum_0^x f^{(2k+2)}(x+u), \quad \omega = \varphi_{2k+2}(u),$$

und folglich ist

$$-\int\limits_0^1 \sum_0^x f^{(2k)}(x+u)\cdot[\varphi_{2k}(u) + A_{2k}]du$$

$$= -\int\limits_0^1 \varphi_{2k+2}(u)du \cdot \sum_0^x f^{(2k+2)}(x+u).$$

Es besteht also die Relation

$$-\int\limits_0^1 \varphi_{2k}(u)du \cdot \sum_0^x f^{(2k)}(x+u)$$

$$= A_{2k}\sum_0^x \int\limits_0^1 f^{(2k)}(x+u)du - \int\limits_0^1 \varphi_{2k+2}(u)du \cdot \sum_0^x f^{(2k+2)}(x+u).$$

Da aber

$$\int_0^1 f^{(2k)}(x+u)\,du = f^{(2k-1)}(x+1) - f^{(2k-1)}(x) = \Delta f^{(2k-1)}(x),$$

so ist

$$\sum_0^x \int_0^1 f^{(2k)}(x+u)\,du = f^{(2k-1)}(x) - f^{(2k-1)}(0)$$

und folglich

$$-\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^x f^{(2k)}(x+u)$$

$$= A_{2k}[f^{(2k-1)}(x) - f^{(2k-1)}(0)] - \int_0^1 \varphi_{2k+2}(u)\,du \sum_0^x f^{(2k+2)}(x+u).$$

Das erste und letzte Glied dieser Formel haben verschiedene Vorzeichen, weil, nach dem in Nr. 33 bewiesenen Satze, $\varphi_{2k}(u)$ und $\varphi_{2k+2}(u)$ im Intervalle $(0, 1)$ verschiedene Vorzeichen haben und nach unsrer Voraussetzung $f^{(2k)}(t)$ und $f^{(2k-2)}(t)$ gleiche Vorzeichen haben.

Die gefundene Relation hat die Form

$$a = b + c,$$

wo $ac < 0$ ist. Aus der Gleichung

$$a^2 = ab + ac$$

folgt

$$0 < a^2 < ab, \quad 0 < \frac{a}{b} < 1.$$

Es ist also

$$a = \theta b,$$

wo $0 < \theta < 1$ ist.

Nach dieser Bemerkung ist

$$\psi(x) = \theta \cdot A_{2k}[f^{(2k-1)}(x) - f^{(2k-1)}(0)]. \tag{11}$$

Diese Formel kann statt (6) gebraucht werden, sobald $f(t)$ gewissen Bedingungen genügt. (Vgl. Markoff, Differenzenrechnung, S. 121.)

39. Zweite Form der Eulerschen Formel. Wir werden voraussetzen, daß für alle positiven Werte von t die Ableitungen $f''(t)$, $f^{\mathrm{IV}}(t)$, $f^{(6)}(t), \ldots$ dieselben Vorzeichen behalten und daß alle Ableitungen $f'(t)$, $f''(t)$, $f'''(t), \ldots$ unendlich klein werden, sobald t unendlich groß wird.

In diesem Falle hat das Integral

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)du \cdot \sum_0^\infty f^{(2k)}(t+u)$$

einen Sinn. Es bedeutet, daß das Integral

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)du \cdot \sum_0^x f^{(2k)}(t+u)$$

bei unendlich wachsendem x sich einer bestimmten Grenze nähert.

In der Tat, bei wachsendem x vergrößert sich der absolute Betrag des Integrals, weil neue Elemente mit demselben Vorzeichen zutreten. Sobald aber x hinreichend groß ist, so ist

$$\left|\int_0^1 \varphi_{2k}(u)du \cdot \sum_0^x f^{(2k)}(t+u)\right| < |A_{2k}|\{1 + |f^{(2k-1)}(0)|\},$$

weil hier die Formel (11) anwendbar ist und nach der gemachten Voraussetzung $|f^{(2k-1)}(x)|$ beliebig klein sein kann.

Nach bekanntem Prinzip hat das Integral eine bestimmte Grenze.

Aus der Relation

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)du \sum_0^x f^{(2k)}(t+u)$$

$$= A_{2k}[f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(x)] + \int_0^1 \varphi_{2k+2}(u)du \sum_0^x f^{(2k+2)}(t+u)$$

folgt

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)du \sum_0^\infty f^{(2k)}(t+u)$$

$$= A_{2k} f^{(2k-1)}(0) + \int_0^1 \varphi_{2k+2}(u)du \sum_0^\infty f^{(2k+2)}(t+u).$$

Da aber

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)du \sum_0^\infty f^{(2k)}(t+u) \quad \text{und} \quad \int_0^1 \varphi_{2k+2}(u)du \sum_0^\infty f^{(2k+2)}(t+u)$$

verschiedene Vorzeichen haben, so ist nach der Bemerkung im vorigen Paragraphen

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^\infty f^{(2k)}(t+u) = \theta_1 A_{2k} f^{(2k-1)}(0),$$

wo $0 < \theta_1 < 1$ ist.

Um diese Formel zu verallgemeinern, genügt es zu setzen

$$f(t) = f(x+v) = F(v),$$

wo v eine neue unabhängige Variable ist und x einen bestimmten Wert hat.

Nach der bewiesenen Formel ist

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^\infty F^{(2k)}(v+u) = \theta_2 A_{2k} F^{(2k-1)}(0)$$

oder

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_x^\infty f^{(2k)}(t+u) = \theta_2 A_{2k} f^{(2k-1)}(x), \tag{12}$$

wo $0 < \theta_2 < 1$ ist.

Wenn man in der Eulerschen Formel das Restglied

$$-\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^x f^{(2k)}(t+u)$$

durch

$$-\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^\infty f^{(2k)}(t+u) + \int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_x^\infty f^{(2k)}(t+u)$$

ersetzt, so findet man

$$\sum_0^x f(t) = \int_0^x f(t)\,dt + C_k + A_1 f(x) + A_2 f'(x) + \cdots$$

$$\cdots + A_{2k-1} f^{(2k-2)}(x) + \int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_x^\infty f^{(2k)}(t+u),$$

wo

$$C_k = -A_1 f(0) - A_2 f'(0) - \cdots$$

$$\cdots - A_{2k-1} f^{(2k-2)}(0) - \int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^\infty f^{(2k)}(t+u).$$

Jetzt wollen wir beweisen, daß die Konstante C_k von k unabhängig ist.

Für $k=1$ ist

$$\sum_0^x f(t) = \int_0^x f(t)\,dt + C_1 + A_1 f(x) + \int_0^1 \varphi_2(u)\,du \sum_x^\infty f''(t+u).$$

Mit Benutzung von (12) findet man

$$\sum_0^x f(t) = C_k + \int_0^x f(t)dt + A_1 f(x) + A_2 f'(x) + \cdots$$
$$+ A_{2k-1} f^{(2k-2)}(x) + \theta A_{2k} f^{(2k-1)}(x)$$

und

$$\sum_0^x f(t) = C_1 + \int_0^x f(t)dt + A_1 f(x) + \theta_1 A_2 f'(x).$$

Der Vergleich der beiden Formeln gibt die Relation

$$C_k + A_2 f'(x) + \cdots + A_{2k-1} f^{(2k-2)}(x) + \theta A_{2k} f^{(2k-1)}(x)$$
$$= C_1 + \theta_1 A_2 f'(x),$$

die für jeden ganzzahligen positiven Wert von x besteht.

Bei unendlich wachsendem x sind alle Ableitungen von $f(x)$ unendlich klein und folglich ist $C_k = C_1$.

Es ist also die Formel bewiesen

$$(13)\quad \begin{cases} \sum_0^x f(t) = C + \int_0^x f(t)dt + A_1 f(x) + A_2 f'(x) + \cdots \\ \qquad + A_{2k-1} f^{(2k-2)}(x) + \theta A_{2k} f^{(2k-1)}(x), \end{cases}$$

wo $0 < \theta < 1$ ist.

40. Der allgemeinere Fall der Eulerschen Formel. Bis jetzt haben wir die bestimmte Summe von der Form

$$f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(x-1)$$

betrachtet. Nun wollen wir zur Summe

$$F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \cdots + F(b-h),$$

wo $b = a + xh$ ist, übergehen.

Es sei

$$F(a+th) = f(t);$$

dann ist

$$F(a) = f(0), \quad F(a+h) = f(1), \quad F(a+2h) = f(2), \cdots$$
$$F(b-h) = f(x-1)$$

und folglich

$$F(a) + F(a+h) + \cdots + F(b-h) = f(0) + f(1) + \cdots + f(x-1).$$

Wenn wir berücksichtigen, daß

$$f^{(m)}(t) = h^m F^{(m)}(a + th),$$

$$f^{(m)}(x) = h^m F^{(m)}(b), \quad f^{(m)}(0) = h^m F^{(m)}(a),$$

so nehmen die Formeln (7), (8), (9) und (10) die Formen an

$$(14)\begin{cases} F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \cdots + F(b-h) \\ \quad = \frac{1}{h}\int\limits_a^b F(u)du + A_1[F(b) - F(a)] + A_2 h[F'(b) - F'(a)] + \cdots \\ \quad + A_{2k-1} h^{2k-2}[F^{(2k-2)}(b) - F^{(2k-2)}(a)] \\ \quad + A_{2k} h^{2k}[F^{(2k)}(a+\theta h) + F^{(2k)}(a+1+\theta h) + \cdots + F^{2k}(b-h+\theta h)], \end{cases}$$

$$(15)\begin{cases} F(a) = \frac{1}{h}\int\limits_a^{a+h} F(u)du + A_1[F(a+h) - F(a)] + A_2 h[F'(a+h) - F'(a)] + \cdots \\ \quad + A_{2k-1} h^{2k-2}[F^{(2k-2)}(a+h) - F^{(2k-2)}(a)] + A_{2k} h^{2k} F^{(2k)}(a+\theta h), \end{cases}$$

$$(16)\begin{cases} F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \cdots + F(b-h) \\ \quad = \frac{1}{h}\int\limits_a^b F(u)du + A_1[F(b) - F(a)] \\ \quad + A_2 h^2[F''(a+\theta h) + F''(a+1+\theta h) + \cdots + F''(b-h+\theta h)] \end{cases}$$

und

$$(17)\quad F(a) = \frac{1}{h}\int\limits_a^{a+h} F(u)du + A_1[F(a+h) - F(a)] + A_2 h^2 F''(a+\theta h).$$

In allen diesen Formeln ist $b = a + xh$ und x eine ganze positive Zahl.

Wenn die Ableitungen $F''(t)$, $F^{\mathrm{IV}}(t)$, $F^{(6)}(t), \ldots$ für $t \geqq a$ dieselben Vorzeichen behalten und die Ableitungen $F'(t)$, $F''(t)$, $F'''(t), \ldots$ unendlich klein werden, sobald t unendlich groß wird, dann besteht die Formel

$$(18)\quad\begin{cases} F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \cdots + F(b-h) \\ \quad = C + \frac{1}{h}\int\limits_a^b F(u)du + A_1 F(b) + A_2 h F'(b) + \cdots \\ \quad + A_{2k-1} h^{2k-2} F^{(2k-2)}(b) + \theta A_{2k} h^{2k-1} F^{(2k-1)}(b), \end{cases}$$

wo die Konstante C von b und k unabhängig ist. (Vgl. Markoff, Differenzenrechnung, S. 131—133.)

Viertes Kapitel.

Anwendungen der Eulerschen Formel.

41. Entwicklung von $\frac{1}{e^t-1}$ in eine Reihe. Setzt man in der Formel (8) (Nr. 37)

$$f(x) = e^{tx},$$

so wird

$$\int_0^1 e^{tx}dx = \frac{e^t-1}{t}, \quad f^{(m)}(1) = t^m e^t, \quad f^{(m)}(0) = t^m, \quad f^{(2k)}(x) = t^{2k}e^{tx}$$

und folglich

$$1 = \frac{e^t-1}{t} + A_1(e^t-1) + A_2 t(e^t-1) + \cdots$$
$$+ A_{2k-2}t^{2k-3}(e^t-1) + A_{2k-1}t^{2k-2}(e^t-1) + A_{2k}t^{2k}e^{\theta t}.$$

Nach der Formel (12) (Nr. 35) ist das Restglied

$$A_{2k}t^{2k}e^{\theta t} = e^{\theta t}\cdot(-1)^{k-1}2\cdot\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{2k}\left[1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots\right].$$

Bei wachsendem k bleibt

$$M_k = 1 + \left(\frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}}\right) + \left(\frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \frac{1}{6^{2k}} + \frac{1}{7^{2k}}\right) + \left(\frac{1}{8^{2k}} + \cdots\right.$$

endlich, weil

$$1 < M_k < 1 + \left(\frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}}\right) + \left(\frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}}\right) + \left(\frac{1}{8^{2k}} + \cdots\right)$$

oder

$$1 < M_k < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{2k-1}}}$$

ist. Daraus folgt, daß $\lim M_k = 1$ ist.

Es ist also für $|t| < 2\pi$ das Restglied dem absoluten Betrage nach beliebig klein für hinreichend große Werte von k.

Folglich besteht für $|t| < 2\pi$ die konvergente Reihe

$$1 = \frac{e^t-1}{t} + A_1(e^t-1) + A_2 t(e^t-1) + A_4 t^3(e^t-1) + \cdots$$

oder

$$\frac{1}{e^t-1} = \frac{1}{t} + A_1 + A_2 t + A_4 t^3 + \cdots \tag{1}$$

42. Entwicklung von $\operatorname{ctg} x$ und $\operatorname{tg} x$ in eine Reihe. In der Formel (8) (Nr. 37) setzen wir

$$f(x) = \cos(tx).$$

Dann wird

$$\int_0^1 \cos(tx)dx = \frac{\sin t}{t}, \quad f'(t) = -t\sin(tx), \quad f'''(t) = +t^3\sin(tx),$$
$$\ldots, f^{(2k)}(x) = (-1)^{k-1}t^{2k}\cos(tx),$$

und folglich ist

$$1 = \frac{\sin t}{t} + A_1(\cos t - 1) - A_2 t \sin t + A_4 t^3 \sin t - \cdots$$
$$+ A_{2k-2}(-1)^{k-1} t^{2k-3} \sin t + A_{2k}(-1)^{k-1} t^{2k} \cos(\theta t).$$

Da aber

$$1 - A_1(\cos t - 1) = \frac{1 + \cos t}{2} = \cos^2 \frac{t}{2},$$

so findet man nach der Division durch

$$\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$$

die Formel

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \frac{1}{t} - A_2 t + A_4 t^3 - A_6 t^5 + \cdots$$
$$+ (-1)^{k-1} A_{2k-2} t^{2k-3} + (-1)^{k-1} A_{2k} t^{2k} \frac{\cos(\Theta t)}{\sin t}.$$

Ebenso, wie in Nr. 41, kann man beweisen, daß das Restglied für $|t| < 2\pi$ und für hinreichend große k beliebig klein wird.

Wenn man x statt $\frac{t}{2}$ einsetzt, so entsteht die Entwicklung

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - 2^2 A_2 x + 2^4 A_4 x^3 - 2^6 A_6 x^5 + \cdots, \tag{2}$$

die für $|x| < \pi$ konvergiert.

Mit Hilfe der Relation

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x$$

findet man die Reihe

$$\operatorname{tg} x = 2^2(2^2 - 1) A_2 x - 2^4(2^4 - 1) A_4 x^3 + 2^6(2^6 - 1) A_6 x^5 - \cdots, \tag{3}$$

wenn $|x| < \frac{\pi}{2}$ ist.

43. Stirlingsche Reihe. Wir wenden die Formel (18) (Nr. 40) an und setzen

$$F(x) = \log x, \quad a = 1, \quad h = 1, \quad b = x.$$

Man findet dann

$$\int \log x dx = x \log x - x, \quad F'(x) = x^{-1}, \quad F''(x) = -x^{-2}, \cdots$$
$$\ldots, F^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1) x^{-m}$$

und folglich

$$\log[1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1)] = C + x \log x - x + A_1 \log x$$
$$+ A_2 x^{-1} + A_4 1 \cdot 2 x^{-3} + \cdots + A_{2k-2} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k-4) x^{-(2k-3)}$$
$$+ \theta A_{2k} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k-2) x^{-(2k-1)}.$$

Indem man zu beiden Seiten $\log x$ addiert und A_1 durch seinen Wert $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ersetzt, so erhält man

$$(4)\quad \begin{cases} \log(1\cdot 2\cdot 3\ldots x) = C + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + A_2 x^{-1} \\ + A_4 1\cdot 2x^{-3} + \cdots + A_{2k-2} 1\cdot 2\cdot 3\ldots(2k-4)x^{-(2k-3)} \\ \qquad + \theta A_{2k} 1\cdot 2\cdot 3\ldots(2k-2)x^{-(2k-1)}. \end{cases}$$

Hier ist $k > 1$ vorausgesetzt. Für $k = 1$ besteht die Formel

$$(5)\quad \log(1\cdot 2\cdot 3\ldots x) = C + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \theta_1 A_2 x^{-1}.$$

Es sind θ und θ_1 Größen zwischen 0 und 1.

Es bleibt noch die Konstante C zu bestimmen. Zu diesem Zweck wenden wir die Wallissche Formel an:

$$\frac{\pi}{2} = \lim \Phi(n) \quad \text{für} \quad \lim n = \infty,$$

wo

$$\Phi(n) = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}$$

ist. Mittels einfacher Umformungen erhalten wir

$$\Phi(n) = \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$= \left[\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\ldots 2n\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(2n-1)2n}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{(2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n)^4}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots 2n)^2}\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{2^{4n}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\ldots n)^4}{(1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n)^2\cdot 2n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}.$$

Daraus folgt

$$\log\Phi(n) = 4n\log 2 + 4\log(1\cdot 2\cdot 3\ldots n)$$
$$- 2\log(1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n) - \log(2n) - \log\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

oder mit Benutzung von (5)

$$\log\Phi(n) = 4n\log 2 + 4C + (4n+2)\log n - 4n + 4\theta_1 A_2\frac{1}{n}$$
$$- \log 2 - \log n - \log\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$
$$- (4n+1)\log 2 - 2C - (4n+1)\log n + 4n - \theta_2 A_2\frac{1}{n}$$
$$= -2\log 2 + 2C + 4\theta_1 A_2\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \theta_2 A_2\frac{1}{n}.$$

Wenn wir jetzt n unendlich wachsen lassen, so wird

$$\lim \log \Phi(n) = \log \frac{\pi}{2}, \quad \lim\left[4\theta_1 A_2 \frac{1}{n}\right] = 0,$$

$$\lim \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 0, \quad \lim\left[\theta_2 A_2 \frac{1}{n}\right] = 0$$

und folglich

$$\log \frac{\pi}{2} = -2\log 2 + 2C.$$

Daraus findet man

$$C = \log \sqrt{2\pi}.$$

Es bestehen also die Formeln

$$(6)\quad \begin{cases} \log(1\cdot 2\cdot 3\ldots x) = \log\sqrt{2\pi} + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + A_2 x^{-1} \\ + A_4 1\cdot 2 x^{-3} + \cdots + A_{2k-2} 1\cdot 2\cdot 3\ldots(2k-4) x^{-(2k-3)} \\ \qquad + \theta A_{2k} 1\cdot 2\cdot 3\ldots(2k-2) x^{-(2k-1)} \end{cases}$$

und

$$(7)\quad \log(1\cdot 2\cdot 3\ldots x) = \log\sqrt{2\pi} + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \theta_1 A_2 x^{-1}.$$

Da $0 < \theta_1 < 1$ und $A_2 = \frac{1}{12}$ ist, so folgt aus (7)

$$\log\sqrt{2\pi} + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x < \log(1\cdot 2\cdot 3\ldots x) < \log\sqrt{2\pi} + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{12x}$$

oder

$$(8)\quad \sqrt{2\pi x}\cdot x^x\cdot e^{-x} < 1\cdot 2\cdot 3\ldots x < \sqrt{2\pi x}\cdot x^x\cdot e^{-x}\cdot e^{\frac{1}{12x}}.$$

Für große Werte von x kann die Näherungsformel

$$(9)\quad 1\cdot 2\cdot 3\ldots x = \sqrt{2\pi x}\cdot x^x\cdot e^{-x}$$

gebraucht werden.

44. Untersuchung des Restgliedes der Stirlingschen Reihe. Die Gleichung (6) ist die Stirlingsche Reihe, deren Konvergenz wir jetzt untersuchen wollen. Zu diesem Zwecke muß man sehen, ob das Restglied bei unendlich wachsendem k unendlich klein wird.

Nach der Formel (12) (Nr. 35) ist

$$\theta A_{2k}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(2k-2)x^{-(2k-1)}$$
$$= \theta\cdot(-1)^{k-1} 2x\cdot\left(\frac{1}{2\pi x}\right)^3\cdot\frac{2}{2\pi x}\cdots\frac{2k-2}{2\pi x}\cdot\left[1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\cdots\right].$$

In Nr. 41 ist bewiesen, daß bei wachsendem k sich die Reihe

$$1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\cdots$$

der Grenze Eins nähert. Für jeden Wert von x wird aber das Produkt

$$\frac{1}{2\pi x}\cdot\frac{2}{2\pi x}\cdot\frac{3}{2\pi x}\cdots\frac{2k-2}{2\pi x}$$

beliebig groß für hinreichend große Werte von k.

Daher ist die Stirlingsche Reihe divergent. Für große Werte von x und kleine Werte von k ist das Restglied dem absoluten Betrage nach sehr klein. In diesem Falle gibt die Stirlingsche Reihe eine gute Annäherung für

$$\log(1\cdot 2\cdot 3\ldots x).$$

Z. B. für $x=100$ und $k=3$ ist der Fehler $<\frac{1}{2\cdot 10^{10}}$. (Markoff, Differenzenrechnung, S. 137.)

Für einen bestimmten Wert von x ist der Fehler dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$|A_{2k}|\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(2k-2)x^{-(2k-1)}.$$

Die beste Annäherung bekommt man für einen solchen Wert von k, für den der Ausdruck

$$u_k=2x\cdot\left(\frac{1}{2\pi x}\right)^3\cdot\frac{2}{2\pi x}\cdot\frac{3}{2\pi x}\cdots\frac{2k-2}{2\pi x}\cdot\left[1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\cdots\right]$$

den kleinsten Wert annimmt, weil der absolute Betrag des Restgliedes kleiner als u_k ist.

Für $k\geqq 6$ ist

$$\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\frac{1}{5^{2k}}+\cdots<\frac{1}{2047}.$$

Deswegen kann man angenähert setzen

$$u_k=2x\cdot\left(\frac{1}{2\pi x}\right)^3\cdot\frac{2}{2\pi x}\cdot\frac{3}{2\pi x}\cdots\frac{2k-2}{2\pi x}.$$

Da aber angenähert

$$u_{k+1}=2x\cdot\left(\frac{1}{2\pi x}\right)^3\cdot\frac{2}{2\pi x}\cdots\frac{2k-2}{2\pi x}\cdot\frac{2k-1}{2\pi x}\cdot\frac{2k}{2\pi x},$$

so ist

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{2k-1}{2\pi x}\cdot\frac{2k}{2\pi x}<\left(\frac{k}{\pi x}\right)^2.$$

Die absoluten Beträge der Glieder der Stirlingschen Reihe nehmen also ab, solange $k < \pi x$ bleibt. Die beste Annäherung erfolgt also, wenn k nahe zu $\pi x + 1$ liegt.*

45. Angenäherte Berechnung der Summe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{x-1}$$

für große Werte von x. In der Formel (18) (Nr. 40) setzen wir

$$F(x)=\frac{1}{x},\quad a=1,\quad h=1,\quad b=x.$$

Dann finden wir

$$\int\frac{dx}{x}=\log x,\quad F^{(m)}(x)=(-1)^m 1\cdot2\cdot3\ldots m x^{-(m+1)}$$

und folglich

$$(10)\quad \begin{cases} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{x-1}=C+\log x-\frac{1}{2}\frac{1}{x}-A_2x^{-2} \\ \quad -A_4 1\cdot2\cdot3x^{-4}-\cdots-A_{2k-2}1\cdot2\cdot3\ldots(2k-3)x^{-(2k-2)} \\ \qquad\qquad -\theta A_{2k}1\cdot2\cdot3\ldots(2k-1)x^{-2k}. \end{cases}$$

Die Konstante C läßt sich nicht durch bekannte Konstanten ausdrücken, sie läßt sich nur angenähert berechnen.

Wenn man $x=10$, $k=7$ setzt und das Restglied vernachlässigt, so findet man

$$C=0{,}57721\quad 56649\quad 01532\ldots$$

Das ist die Eulersche Konstante.

Ebenso wie in Nr. 43 kann man zeigen, daß die Reihe (10) für jeden Wert von x divergiert. Deswegen darf zur Berechnung der betrachteten Summe nur eine geringe Anzahl der Glieder der Reihe genommen werden.

In die Untersuchung, wie groß diese Anzahl sein kann, werden wir uns nicht einlassen.

* Vgl. Encykl. der Math. Wiss., Bd. I, p. 103.

Dritter Teil.

Differenzengleichungen.

Erstes Kapitel.

Allgemeines über Differenzengleichungen.

46. Zwei Formen der Differenzengleichungen. Eine Gleichung von der Form

$$(1) \qquad \Phi(x,\, y_x,\, \Delta y_x,\, \Delta^2 y_x, \ldots,\, \Delta^m y_x) = 0$$

heißt Differenzengleichung. Hier ist Φ eine gegebene Funktion, y_x eine unbekannte Funktion.

Bei Anwendung der Formeln

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x,$$

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^m y_x = y_{x+m} - m y_{x+m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} y_{x+m-2} - \cdots + (-1)^m y_x$$

nimmt die Gleichung (1) die andre Form an

$$(2) \qquad \psi(x,\, y_x,\, y_{x+1},\, y_{x+2}, \ldots,\, y_{x+m}) = 0.$$

Ist die Gleichung in der Form (2) gegeben, so kann man sie in die Form (1) überführen. Es genügt, die Formeln

$$y_{x+1} = y_x + \Delta y_x,$$

$$y_{x+2} = y_x + 2\Delta y_x + \Delta^2 y_x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{x+m} = y_x + m\Delta y_x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_x + \cdots + \Delta^m y_x$$

anzuwenden.

Von diesen beiden Formen (1) und (2) ist (2) die bequemere. Es ist einfacher, eine gegebene Funktion statt y_x in die Gleichung (2), als in (1) einzusetzen.

Wenn bei der Transformation (1) in (2) z. B. die Größen y_x und y_{x+1} wegfallen, so wird die Gleichung (2) dadurch vereinfacht, daß man $y_{x+2} = z_x$ setzt.

Es sei die Gleichung

$$\Delta^3 y_x + \Delta^2 y_x - \Delta y_x - y_x = 0$$

gegeben. Mit Anwendung der Formeln

$$\Delta^3 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x,$$
$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x,$$
$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

geht diese Gleichung in

$$y_{x+3} - 2y_{x+2} = 0$$

über. Setzt man $y_{x+2} = z_x$, so entsteht die einfachere Gleichung

$$z_{x+1} - 2z_x = 0.$$

Aus diesen Gründen werden wir voraussetzen, daß die gegebene Gleichung die Form (2) hat und daß in ihr y_x enthalten ist. Wenn außer y_x noch y_{x+m}, aber kein y mit größerem Index vorkommt, so werden wir (2) eine Gleichung m^{ter} Ordnung nennen. Die eben betrachtete Gleichung

$$\Delta^3 y_x + \Delta^2 y_x - \Delta y_x - y_x = 0$$

ist also eine Gleichung 1ter Ordnung.

47. Partikuläre und allgemeine Lösungen. Wir werden voraussetzen, daß die vorgelegte Differenzengleichung n^{ter} Ordnung die Form hat

$$y_{x+n} = f(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+n-1}). \tag{3}$$

Die Funktion f soll für alle betrachteten Werte von x, y_x, y_{x+1}, $y_{x+2}, \ldots, y_{x+n-1}$ einen endlichen und bestimmten Wert erhalten.

Jeder Ausdruck $y_x = \varphi(x)$, der dieser Gleichung genügt, heißt partikuläre Lösung von (3).

Es gibt unendlich viele partikuläre Lösungen. Um dies zu zeigen, wollen wir den Größen $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ willkürliche Werte beilegen.

Aus (3) ergibt sich für $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ das System der Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} y_n = f(0, & y_0, & y_1, & y_2, \ldots, & y_{n-1}), \\ y_{n+1} = f(1, & y_1, & y_2, & y_3, \ldots, & y_n), \\ y_{n+2} = f(2, & y_2, & y_3, & y_4, \ldots, & y_{n+1}), \\ y_{n+3} = f(3, & y_3, & y_4, & y_5, \ldots, & y_{n+2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

aus welchem $y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, \ldots$ sukzessive berechnet werden können. Es hat also y_x einen ganz bestimmten Wert für ganze positive x, sobald $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ gegeben sind. Man kann also schreiben

$$(5)\qquad y_x = F(x, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}).$$

Die Wahl der Anfangswerte $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ist nur einer Bedingung unterworfen: es sollen alle Gleichungen des Systems (4) einen Sinn haben.

Es ist möglich, daß die Funktion

$$f(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+n-1})$$

einen bestimmten Wert erhält für $x \geqq a$ und für beliebige Werte von $y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+n-1}$.

Dann besteht das System

$$(6)\qquad \begin{cases} y_{a+n} = f(a, & y_a, & y_{a+1}, & y_{a+2}, \ldots, & y_{a+n-1}), \\ y_{a+n+1} = f(a+1, & y_{a+1}, & y_{a+2}, & y_{a+3}, \ldots, & y_{a+n}), \\ y_{a+n+2} = f(a+2, & y_{a+2}, & y_{a+3}, & y_{a+4}, \ldots, & y_{a+n+1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Daraus folgt die Relation

$$(7)\qquad y_x = \Phi(x, y_a, y_{a+1}, y_{a+2}, \ldots, y_{a+n-1})$$

für $x \geqq a$. Hier ist die Differenz $x - a$ gleich einer ganzen positiven Zahl.

In den Formeln (5) und (7) sind $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ oder $y_a, y_{a+1}, y_{a+2}, \ldots, y_{a+n-1}$ willkürliche Konstanten.

Jede Lösung der Gleichung (3) von der Form

$$(8)\qquad y_x = \psi(x, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n),$$

die n willkürliche Konstanten enthält, heißt allgemeine Lösung, wenn es möglich ist, die Gleichung (8) in die Form (5) oder (7) zu bringen.

Zu diesem Zweck muß man aus dem System

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \psi(0, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n),\\ y_1 &= \psi(1, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n),\\ y_2 &= \psi(2, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ y_{n-1} &= \psi(n-1, C_1, C_2, \ldots, C_n),\end{aligned}\right\}(9) \text{ oder } (10)\left\{\begin{aligned} y_a &= \psi(a, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n),\\ y_{a+1} &= \psi(a+1, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n),\\ y_{a+2} &= \psi(a+2, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ y_{a+n-1} &= \psi(a+n-1, C_1, C_2, \ldots, C_n)\end{aligned}\right.$$

die Konstanten $C_1, C_2, \ldots, C_n$ durch $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ oder durch $y_a, y_{a+1}, y_{a+2}, \ldots, y_{a+n-1}$ ausdrücken.

Man nennt die willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots, C_n$ wesentlich, wenn das System (9) oder (10) in bezug auf diese Konstanten lösbar ist.

Allgemeine Lösung von (3) ist also eine Lösung, die n wesentliche Konstanten enthält.

Aus einer allgemeinen Lösung lassen sich viele andere ableiten. Es genügt in (8)

$$C_h = \alpha_{1h} c_1 + \alpha_{2h} c_2 + \cdots + \alpha_{nh} c_n$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n)$$

zu setzen. Die Koeffizienten α_{kh} sind nur einer Bedingung unterworfen, daß die Determinante $|\alpha_{kh}|$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, \ldots, n)$ nicht verschwindet. In diesem Falle lassen sich $c_1, c_2, \ldots, c_n$ durch $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ausdrücken.

48. Eigenschaften der linearen Differenzengleichungen. Eine Gleichung von der Form

$$(11) \qquad y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_{n-1} y_{x+1} + p_n y_x = Q_x$$

heißt lineare Gleichung. Die Koeffizienten $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ und das letzte Glied Q_x sind gegebene Funktionen von x. Wenn wir Q_x durch Null ersetzen, so entsteht die entsprechende homogene Gleichung

$$(12) \qquad y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_{n-1} y_{x+1} + p_n y_x = 0.$$

Die Gleichung (11) heißt eine vollständige, wenn Q_x nicht gleich Null ist.

Es sei Y_x eine partikuläre Lösung von (11). Wenn man in die linke Seite dieser Gleichung

$$(13) \qquad y_x = Y_x + z_x$$

einsetzt, so findet man

$$Y_{x+n} + p_1 Y_{x+n-1} + p_2 Y_{x+n-2} + \cdots + p_{n-1} Y_{x+1} + p_n Y_x$$

$$+ z_{x+n} + p_1 z_{x+n-1} + p_2 z_{x+n-2} + \cdots + p_{n-1} z_{x+1} + p_n z_x .$$

Die erste Zeile ist nach der Voraussetzung gleich Q_x. Daraus folgt, daß der Ausdruck (13) der vollständigen Gleichung genügt, wenn z_x eine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung (12) ist.

Wenn

$$y_x = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

allgemeine Lösung von (12) ist, dann ist

$$y_x = Y_x + \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

allgemeine Lösung der vollständigen Gleichung (11).

Lineare homogene Gleichungen besitzen folgende bemerkenswerte Eigenschaften:

1. Wenn z_x eine Lösung von (12) ist, so ist auch Cz_x eine Lösung. Dies folgt aus der Relation

$$Cz_{x+n} + p_1 Cz_{x+n-1} + p_2 Cz_{x+n-2} + \cdots + p_{n-1} Cz_{x+1} + p_n Cz_x$$
$$= C\left(z_{x+n} + p_1 z_{x+n-1} + p_2 z_{x+n-2} + \cdots + p_n z_x\right).$$

Hier ist C eine willkürliche Konstante.

2. Wenn $z_x^{(1)}$ und $z_x^{(2)}$ Lösungen von (12) sind, so ist auch $z_x^{(1)} + z_x^{(2)}$ eine Lösung, weil

$$z_{x+n}^{(1)} + z_{x+n}^{(2)} + p_1\left(z_{x+n-1}^{(1)} + z_{x+n-1}^{(2)}\right) + p_2\left(z_{x+n-2}^{(1)} + z_{x+n-2}^{(2)}\right) + \cdots$$
$$+ p_n\left(z_x^{(1)} + z_x^{(2)}\right) = \left(z_{x+n}^{(1)} + p_1 z_{x+n-1}^{(1)} + p_2 z_{x+n-2}^{(1)} + \cdots + p_n z_x^{(1)}\right)$$
$$+ \left(z_{x+n}^{(2)} + p_1 z_{x+n-1}^{(2)} + p_2 z_{x+n-2}^{(2)} + \cdots + p_n z_x^{(2)}\right)$$

ist.

Aus diesen Sätzen folgt der wichtige Satz:

3. Sind $z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(n)}$ verschiedene Lösungen der linearen homogenen Gleichung, so ist auch

$$y_x = C_1 z_x^{(1)} + C_2 z_x^{(2)} + \cdots + C_n z_x^{(n)} \tag{14}$$

eine Lösung. Hier sind $C_1, C_2, \ldots, C_n$ willkürliche Konstanten. Wenn dieselben wesentlich verschieden sind, dann ist der Ausdruck (14) allgemeine Lösung von (12).

In Nr. 47 haben wir gesehen, daß eine Differenzengleichung eine Funktion definiert, wenn die Anfangswerte gegeben sind. Um n partikuläre Lösungen zu bilden, genügt es, n Systeme von Anfangswerten anzugeben

$$(15)\qquad \begin{cases} z_0^{(1)}, & z_1^{(1)}, & z_2^{(1)}, & \ldots, & z_{n-1}^{(1)}, \\ z_0^{(2)}, & z_1^{(2)}, & z_2^{(2)}, & \ldots, & z_{n-1}^{(2)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_0^{(n)}, & z_1^{(n)}, & z_2^{(n)}, & \ldots, & z_{n-1}^{(n)}. \end{cases}$$

Wenn die Determinante, die aus diesen Elementen gebildet ist, nicht verschwindet, dann sind im Ausdruck (14) die Konstanten wesentlich verschieden und die Formel (14) ist wirklich allgemeine Lösung der Gleichung (12).

Wir bekommen also den Satz:

Die allgemeine Lösung einer linearen homogenen Gleichung ist eine lineare homogene Funktion der willkürlichen Konstanten.

Es war bei dem Beweise dieses Satzes vorausgesetzt, daß die Koeffizienten der gegebenen homogenen Gleichung einen Sinn haben für ganze positive x.

Wenn aber wir nur behaupten können, daß $p_1, p_2, \ldots, p_n$ endliche und bestimmte Werte haben für $x \geqq a$, dann ist das System (15) durch das folgende

$$(16)\qquad \begin{cases} z_a^{(1)}, & z_{a+1}^{(1)}, & \ldots, & z_{a+n-1}^{(1)}, \\ z_a^{(2)}, & z_{a+1}^{(2)}, & \ldots, & z_{a+n-1}^{(2)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_a^{(n)}, & z_{a+1}^{(n)}, & \ldots, & z_{a+n-1}^{(n)} \end{cases}$$

zu ersetzen.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen gehen wir jetzt zu speziellen Gleichungen über.

Zweites Kapitel.

Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung.

49. Homogene Gleichung. Um die allgemeine Lösung der Gleichung

$$(1)\qquad y_{x+1} - A_x y_x = 0$$

zu bilden, geben wir der Größe y_0 einen beliebigen Wert. Aus (1) folgt dann

$$\begin{aligned} y_1 &= A_0 y_0, \\ y_2 &= A_1 y_1 = A_0 A_1 y_0, \\ y_3 &= A_2 y_2 = A_0 A_1 A_2 y_0, \ldots \\ &\cdots\cdots \\ y_x &= A_0 A_1 A_2 \ldots A_{x-1} y_0. \end{aligned}$$

Weil y_0 willkürlich ist, kann man schreiben

$$y_x = C \cdot A_0 \cdot A_1 \cdot A_2 \dots A_{x-1}, \tag{2}$$

wo C die willkürliche Konstante ist. Das ist die gesuchte Lösung.

Wir werden voraussetzen, daß in (2) keine der Größen $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{x-1}$ gleich Null ist. Sonst hätten wir die evidente Lösung $y_x = 0$, die kein Interesse bietet.

Wenn für alle $x \geqq a$ die Funktion A_x einen endlichen, bestimmten und von Null verschiedenen Wert hat, dann ist die allgemeine Lösung unserer Gleichung

$$y_x = C \cdot A_a \cdot A_{a+1} \cdot A_{a+2} \dots A_{x-1}. \tag{3}$$

50. Vollständige Gleichung. Um die Gleichung

$$y_{x+1} - A_x y_x = B_x \tag{4}$$

aufzulösen, setzen wir

$$y_x = u_x \cdot v_x, \tag{5}$$

wo u_x und v_x neue unbekannte Funktionen sind; eine derselben wählen wir so, daß die Gleichung für die andere Funktion möglich einfach sei.

Da

$$v_{x+1} = v_x + \Delta v_x$$

ist, so nimmt die Gleichung

$$u_{x+1} \cdot v_{x+1} - A_x u_x v_x = B_x$$

die Form an

$$u_{x+1}(v_x + \Delta v_x) - A_x u_x v_x = B_x$$

oder

$$(u_{x+1} - A_x u_x) v_x + u_{x+1} \cdot \Delta v_x = B_x. \tag{6}$$

Wenn u_x eine partikuläre Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung (1) ist, dann erhalten wir die Gleichung

$$u_{x+1} \cdot \Delta v_x = B_x,$$

die v_x bestimmt. Es ist

$$v_x = \sum \frac{B_x}{u_{x+1}} + C$$

und folglich

$$y_x = u_x \left[\sum \frac{B_x}{u_{x+1}} + C \right]. \tag{7}$$

Aus der Betrachtung in Nr. 49 folgt, daß man

$$u_x = A_0 A_1 A_2 \dots A_{x-1} \quad \text{oder} \quad u_x = A_a A_{a+1} \dots A_{x-1}$$

setzen kann. In diesen partikulären Lösungen ist $u_0 = 1$ oder $u_a = 1$.

51. Beispiele. 1. Es sei die Gleichung

$$y_{x+1} - 3y_x = a^x$$

gegeben. Hier ist $A_x = 3$, $B_x = a^x$,

$$A_0 = A_1 = A_2 = \cdots = A_{x-1} = 3,$$

$$u_x = 3^x,$$

Die Formel

$$v_x = \sum \frac{a^x}{3^{x+1}} + C$$

hat verschiedene Werte, je nachdem $a = 3$ oder $a \gtrless 3$.

Wenn a von 3 verschieden ist, dann ist

$$\sum \frac{a^x}{3^{x+1}} = \frac{1}{3} \sum \left(\frac{a}{3}\right)^x = \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^x}{\frac{a}{3} - 1} + C$$

und folglich

$$y_x = C \cdot 3^x + \frac{a^x}{a-3}.$$

Wenn aber $a = 3$ ist, so ist

$$\sum \frac{a^x}{3^{x+1}} = \frac{1}{3} \Sigma 1 = \frac{1}{3} x + C$$

und

$$y_x = C \cdot 3^x + \frac{1}{3} x \cdot 3^x.$$

2. Wenn wir die Gleichung

$$y_{x+1} + \frac{3x+1}{3x+7} y_x = \frac{x}{(3x+4)(3x+7)}$$

nehmen, so ist

$$A_x = -\frac{3x+1}{3x+7}, \quad B_x = \frac{x}{(3x+4)(3x+7)},$$

$$u_x = (-1)^x \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{10}{16} \cdots \frac{3x-5}{3x+1} \cdot \frac{3x-2}{3x+4}$$

$$= (-1)^x \cdot \frac{1 \cdot 4}{(3x+1)(3x+4)},$$

$$\frac{B_x}{u_{x+1}} = -\frac{1}{4} (-1)^x \cdot x,$$

$$\Sigma(-1)^x \cdot x = \Sigma x \cdot \Delta \frac{(-1)^x}{-2} = -\frac{1}{2} x (-1)^x - \frac{1}{2} \Sigma(-1)^x$$

$$= (-1)^x \left[-\frac{1}{2} x + \frac{1}{4}\right] + C.$$

Folglich ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$y_x = (-1)^x \cdot \frac{1}{(3x+1)(3x+4)} \cdot C + \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{(3x+1)(3x+4)}.$$

3. Als letztes Beispiel wollen wir noch die Gleichung

$$y_{x+1} - \frac{2x+7}{2x+1} \cdot \frac{3x+1}{3x+4} y_x = \frac{1}{3x+4}$$

auflösen. Es ist

$$u_x = \frac{7}{1} \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{11}{5} \cdots \frac{2x+5}{2x-1} \cdot$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{10} \cdots \frac{3x-2}{3x+1} = \frac{(2x+1)(2x+3)(2x+5)}{15(3x+1)},$$

$$\frac{B_x}{u_{x+1}} = \frac{15}{(2x+3)(2x+5)(2x+7)},$$

$$\sum \frac{1}{(2x+3)(2x+5)(2x+7)} = \frac{1}{8} \sum \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{16} \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)} + C = -\frac{1}{4} \frac{1}{(2x+3)(2x+5)} + C,$$

$$y_x = \frac{(2x+1)(2x+3)(2x+5)}{3x+1} \cdot C - \frac{1}{4} \cdot \frac{2x+1}{3x+1}.$$

(Vgl. Markoff, A. A. Differenzenrechnung, S. 156—158.)

Jetzt wollen wir die Anwendungen der Gleichungen erster Ordnung zeigen. Die Koeffizienten verschiedener Entwicklungen genügen Differenzengleichungen. Die Auflösung derselben führt zur Bestimmung der Koeffizienten. Als Beispiel nehmen wir die binomische Entwicklung und die Entwicklung von cos xt nach Potenzen von cos t.

52. Die binomische Entwicklung. Das Produkt von x Faktoren

$$(1+t)(1+t)\dots(1+t)$$

hat die Form

$$(1+t)^x = 1 + A_x t + B_x t^2 + C_x t^3 + \cdots + H_x t^{x-1} + K_x t^x.$$

Der letzte Koeffizient ist gleich Eins. Die Funktion

A_x hat einen Sinn für $x \geqq 1$,
B_x „ „ „ „ $x \geqq 2$,
C_x „ „ „ „ $x \geqq 3$,
. . . .

Die Anfangswerte sind

$$A_1 = 1, \quad B_2 = 1, \quad C_3 = 1, \dots$$

Nach Multiplikation mit $1 + t$ findet man

$$(1+t)^{x+1} = 1 + (1 + A_x)t + (A_x + B_x)t^2 + (B_x + C_x)t^3 + \cdots$$
$$\cdots + (H_x + K_x)t^x + K_x t^{x+1}.$$

Anderseits ist

$$(1+t)^{x+1} = 1 + A_{x+1}t + B_{x+1}t^2 + C_{x+1}t^3 + \cdots$$
$$\cdots + H_{x+1}t^{x-1} + K_{x+1}t^x + L_{x+1}t^{x+1}.$$

Daraus folgt

$$A_{x+1} = A_x + 1,$$
$$B_{x+1} = B_x + A_x,$$
$$C_{x+1} = C_x + B_x,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$K_{x+1} = K_x + H_x.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt

$$A_x = \Sigma 1 \;= x + c; \quad \text{es ist } c = 0, \text{ weil } A_1 = 1 \text{ ist.}$$
$$B_x = \Sigma A_x = \Sigma x = \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} + c.$$

Aus der Bedingung $B_2 = 1$ folgt $c = 0$ und

$$B_x = \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}.$$
$$C_x = \Sigma B_x = \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + c.$$

Die willkürliche Konstante c ist $= 0$, weil $C_3 = 1$ ist.
In dieser Weise erhalten wir die binomische Entwicklung

$$(1+t)^x = 1 + xt + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}t^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \cdots$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)\ldots[x-(x-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots x}t^x.$$

Der letzte Koeffizient ist gleich Eins, wie es auch sein sollte.

53. Entwicklung von $\cos xt$ nach Potenzen von $\cos t$. Nach der Moivreschen Formel ist

$$(\cos t + i \sin t)^x = \cos xt + i \sin xt.$$

Der Vergleich der reellen Teile beider Seiten dieser Gleichung ergibt

$$\cos xt = \cos^x t - \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\sin^2 t \cdot \cos^{x-2} t$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4 t \cdot \cos^{x-4} t - \cdots$$

Wenn man die geraden Potenzen von $\sin t$ durch $\cos t$ ausdrückt, so findet man eine Gleichung von der Form

$$\cos xt = A_x \cos^x t + B_x \cos^{x-2} t + C_x \cos^{x-4} t + \cdots$$

Es sollen die Koeffizienten $A_x, B_x, C_x, \ldots$ bestimmt werden.

Der Kürze halber wollen wir $\cos t$ mit u bezeichnen. In der Entwicklung

$$\cos xt = A_x u^x + B_x u^{x-2} + C_x u^{x-4} + D_x u^{x-6} + \cdots$$

hat die Funktion

$$\begin{array}{llll} A_x & \text{einen Sinn für} & x \geqq 1, \\ B_x & \text{„ \quad „ \quad „} & x \geqq 2, \\ C_x & \text{„ \quad „ \quad „} & x \geqq 4, \\ D_x & \text{„ \quad „ \quad „} & x \geqq 6, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Aus der Formel $\cos t = A_1 u$ folgt, daß $A_1 = 1$ ist. Um die übrigen Anfangswerte zu bestimmen, genügt es, in den Formeln

$$\begin{aligned} \cos 2t &= A_2 u^2 + B_2, \\ \cos 4t &= A_4 u^4 + B_4 u^2 + C_4, \\ \cos 6t &= A_6 u^6 + B_6 u^4 + C_6 u^2 + D_6 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$t = \frac{\pi}{2}$ oder $u = 0$ zu setzen. Man findet

$$B_2 = -1, \quad C_4 = 1, \quad D_6 = -1, \ldots$$

Aus der Relation

$$\cos (x+1)t + \cos (x-1)t = 2 \cos t \cdot \cos xt$$

folgt die Identität

$$\begin{aligned} A_{x+1} u^{x+1} + (B_{x+1} + A_{x-1}) u^{x-1} + (C_{x+1} + B_{x-1}) u^{x-3} + \cdots \\ = 2 A_x u^{x+1} + 2 B_x u^{x-1} + 2 C_x u^{x-3} + \cdots \end{aligned}$$

Der Vergleich der Koeffizienten führt zu den Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} A_{x+1} - 2A_x &= 0, \\ B_{x+1} - 2B_x &= -A_{x-1}, \\ C_{x+1} - 2C_x &= -B_{x-1}, \\ D_{x+1} - 2D_x &= -C_{x-1}, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich, wenn man neue Funktionen einführt.

Wenn wir setzen

$$A_x = 2^{x-1} \cdot a_x, \quad B_x = -2^{x-3} \cdot b_x, \quad C_x = 2^{x-5} \cdot c_x, \ldots,$$

so finden wir

$$\begin{aligned} a_{x+1} - a_x &= 0, \\ b_{x+1} - b_x &= a_{x-1}, \\ c_{x+1} - c_x &= b_{x-1}, \\ d_{x+1} - d_x &= c_{x-1}, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Anfangswerte sind

$$a_1 = 1, \quad b_2 = 2, \quad c_4 = 2, \quad d_6 = 2, \ldots$$

Aus der ersten Gleichung folgt, daß a_x konstant ist; da aber $a_1 = 1$ ist, so ist

$$a_x = 1 \quad \text{und} \quad A_x = 2^{x-1}.$$

Die zweite Gleichung gibt

$$b_x = \Sigma 1 = x + c.$$

Weil $b_2 = 2$ ist, so ist $c = 0$,

$$b_x = x \qquad \text{und} \qquad B_x = -2^{x-3} \cdot x.$$

Die weiteren Rechnungen sind

$$c_x = \Sigma(x-1) = \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} + c,$$

$$c_4 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + c, \quad c = -1,$$

$$c_x = \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} - 1,$$

$$d_x = \sum\left[\frac{(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2} - 1\right] = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - x + c,$$

$$2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 6 + c, \quad c = 4,$$

$$d_x = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - (x-4),$$

$$e_x = \sum\left[\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - (x-5)\right]$$

$$= \frac{(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(x-5)(x-6)}{1 \cdot 2} + c,$$

$$2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + c, \quad c = 0,$$

$$e_x = \frac{(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(x-5)(x-6)}{1 \cdot 2},$$

$$f_x = \sum\left[\frac{(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(x-6)(x-7)}{1 \cdot 2}\right]$$

$$= \frac{(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{(x-6)(x-7)(x-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + c,$$

$$2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + c, \quad c = 0,$$

$$f_x = \frac{(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{(x-6)(x-7)(x-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

. . . .

Die gefundenen Ausdrücke für c_x, d_x, e_x, f_x lassen sich vereinfachen. Es ist

$$c_x = \left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{x(x-3)}{1 \cdot 2},$$

$$d_x = (x-4) \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right) - 1\right] = \frac{x(x-4)(x-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$e_x = \frac{(x-5)(x-6)}{1 \cdot 2} \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{3}\right)\left(1 - \frac{x}{4}\right) - 1\right] = \frac{x(x-5)(x-6)(x-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$f_x = \frac{(x-6)(x-7)(x-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{4}\right)\left(1 - \frac{x}{5}\right) - 1\right] = \frac{x(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

. . . .

Die gesuchten Koeffizienten haben also die Werte

$$A_x = 2^{x-1}, \quad B_x = -2^{x-3} \cdot x, \quad C_x = 2^{x-5} \cdot \frac{x(x-3)}{1 \cdot 2},$$

$$D_x = -2^{x-7} \cdot \frac{x(x-4)(x-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad E_x = 2^{x-9} \cdot \frac{x(x-5)(x-6)(x-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$F_x = -2^{x-11} \cdot \frac{x(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \ldots$$

P. L. Tschebyscheff hat bemerkt, daß die ganze Funktion x^{ten} Grades

$$f(u) = \frac{\cos xt}{2^{x-1}} = u^x + p_1 u^{x-1} + p_2 u^{x-2} + \cdots + p_{x-1} u + p_x$$

im Intervall $(-1, +1)$ weniger von Null abweicht, als jede andre ganze Funktion von derselben Form:

$$\varphi(u) = u_x + q_1 u^{x-1} + q_2 u^{x-2} + \cdots + q_{x-1} u + q_x.$$

(Oeuvres de P. L. Tchebychef, t. I, p. 295—301. Vgl. J. Bertrand, Traité de calcul différentiel et de calcul integral, t. I, p. 512—521.)

Die Abweichung von Null ist der größte absolute Betrag einer Funktion. Wenn z. B.

$$|F(u)| \leqq A \quad \text{für} \quad a < u < b,$$

so ist A die Abweichung von Null der Funktion $F(u)$ im Intervall (a, b).

Die Abweichung von Null der Funktion

$$f(u) = \frac{1}{2^{x-1}} \cos(x \arccos u)$$

im Intervall $(-1, +1)$ ist gleich $\frac{1}{2^{x-1}}$.

Wir wollen voraussetzen, daß im Intervall $(-1, +1)$ die Funktion $\varphi(u)$ weniger von Null abweicht, als $f(u)$.

Für

$$t = 0, \quad \frac{\pi}{x}, \quad \frac{2\pi}{x}, \ldots, \quad \frac{(x-1)\pi}{x}, \quad \pi$$

ist

$$u = 1, \quad \cos\frac{\pi}{x}, \quad \cos\frac{2\pi}{x}, \ldots, \quad \cos\frac{(x-1)\pi}{x}, \quad -1,$$

$$f(u) = \frac{1}{2^{x-1}}, \quad -\frac{1}{2^{x-1}}, \quad \frac{1}{2^{x-1}}, \ldots, \quad (-1)^{x-1}\cdot\frac{1}{2^{x-1}}, \quad (-1)^x\frac{1}{2^{x-1}}.$$

Wenn wir der Kürze wegen die Bezeichnung einführen

$$u_k = \cos\frac{k\pi}{x}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, x),$$

so bestehen nach unsrer Voraussetzung die Ungleichheiten

$$f(u_0) - \varphi(u_0) > 0, \quad f(u_1) - \varphi(u_1) < 0, \quad f(u_2) - \varphi(u_2) > 0, \ldots$$

In jedem der Intervalle

$$(u_0, u_1), \quad (u_1, u_2), \ldots, \quad (u_{x-1}, u_x)$$

hat die Gleichung $f(u) - \varphi(u) = 0$ mindestens eine Wurzel und also im Intervall $(-1, +1)$ mindestens x verschiedene Wurzeln. Dies ist aber unmöglich, weil die ganze Funktion

$$f(u) - \varphi(u) = (p_1 - q_1)u^{x-1} + (p_2 - q_2)u^{x-2} + \cdots + (p_x - q_x)$$

den Grad $x - 1$ nicht übersteigen kann.

Damit ist also der Satz von Tschebyscheff bewiesen. Diesen Beweis verdanke ich einer mündlichen Mitteilung von Herrn A. A. Markoff.

(Vgl. Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Nr. 1052—1054.)

Drittes Kapitel.

Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten.

54. Partikuläre Lösungen der homogenen Gleichung. Um die Lösungen der Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(1) \ldots \quad y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x = 0$$

zu finden, werden wir in die linke Seite dieser Gleichung einsetzen

$$(2) \qquad y_x = a^x \cdot u_x,$$

wo u_x eine ganze Funktion m^{ten} Grades ist.

Mit Benutzung der Formeln

$$y_{x+1} = a^{x+1} \cdot u_{x+1} = a^{x+1}(u_x + \Delta u_x),$$
$$y_{x+2} = a^{x+2}(u_x + 2\Delta u_x + \Delta^2 u_x),$$
$$y_{x+3} = a^{x+3}(u_x + 3\Delta u_x + 3\Delta^2 u_x + \Delta^3 u_x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{x+n} = a^{x+n}\left(u_x + n\,\Delta\, u_x + \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 u_x + \cdots + \Delta^n u_x\right)$$

findet man als Resultat dieser Substitution die Identität

$$\begin{aligned}
&y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x \\
&= a^x(a^n + p_1 a^{n-1} + p_2 a^{n-2} + \cdots + p_n) u_x \\
&+ a^{x+1}[n a^{n-1} + (n-1) p_1 a^{n-2} + (n-2) p_2 a^{n-3} + \cdots + p_{n-1}]\,\Delta\, u_x \\
&+ a^{x+2}[n(n-1)\,a^{n-2} + (n-1)(n-2) p_1 a^{n-3} + (n-2)(n-3) p_2 a^{n-4} + \cdots + 2p_{n-2}]\,\frac{\Delta^2 u_x}{1\cdot 2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ a^{x+n}\cdot n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot \frac{\Delta^n u_x}{1\cdot 2\ldots n}.
\end{aligned}$$

Zur Abkürzung wollen wir die Bezeichnung einführen

$$f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots + p_n. \tag{3}$$

Die gefundene Identität nimmt dann die Form an

$$\left\{\begin{aligned}
&y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x \\
&= a^x\cdot f(a)\cdot u_x + a^{x+1}\cdot f'(a)\cdot \Delta u_x + a^{x+2}\cdot f''(a)\cdot \frac{\Delta^2 u_x}{1\cdot 2} + \cdots \\
&+ a^{x+n}\cdot f^{(n)}(a)\cdot \frac{\Delta^n u_x}{1\cdot 2\ldots n}.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Unter y_x ist hier $a^x\cdot u_x$ zu verstehen.

Die rechte Seite von (4) verschwindet, wenn a eine Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ und $u_x = 1$ ist. Eine partikuläre Lösung von (1) ist dann a^x.

Wir wollen voraussetzen, daß a eine k-fache Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ ist. Die rechte Seite von (4) ist dann

$$a^{x+k}\cdot f^{(k)}(a)\cdot \frac{\Delta^k u_x}{1\cdot 2\ldots k} + a^{x+k+1}\cdot f^{(k+1)}(a)\cdot \frac{\Delta^{k+1} u_x}{1\cdot 2\ldots (k+1)} + \cdots$$
$$\cdots + a^{x+n}\cdot f^{(n)}(a)\cdot \frac{\Delta^n u_x}{1\cdot 2\ldots n}.$$

Dieser Ausdruck ist gleich Null, sobald u_x eine ganze Funktion vom $(k-1)^{\text{ten}}$ oder niedrigeren Grade ist. Wir setzen

$$u_x = 1;$$
$$u_0 = 0, \quad \Delta u_x = 1;$$
$$u_0 = 0, \quad \Delta u_0 = 0, \quad \frac{\Delta^2 u_x}{1 \cdot 2} = 1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_0 = 0, \quad \Delta u_0 = 0, \quad \Delta^2 u_0 = 0, \ldots, \quad \frac{\Delta^{k-1} u_x}{1 \cdot 2 \ldots (k-1)} = 1.$$

Dann ist

$$u_x = 1, \quad u_x = x, \quad u_x = x(x-1), \ldots$$
$$u_x = x(x-1)(x-2) \ldots (x-k+2);$$

wir haben also k partikuläre Lösungen von (1)

$$a^x, \quad a^x \cdot x, \quad a^x \cdot x(x-1), \ldots, \quad a^x \cdot x(x-1) \ldots (x-k+2).$$

In Nr. 48 war es schon gezeigt, daß den partikulären Lösungen einer linearen homogenen Gleichung ein konstanter Faktor hinzugefügt werden kann. Deswegen kann man die gefundenen partikulären Lösungen durch die folgenden ersetzen

$$a^x, \quad xa^{x-1}, \quad x(x-1)a^{x-2}, \ldots, \quad x(x-1) \ldots (x-k+2)a^{x-k-1}.$$

Um diese Lösungen zu bilden, genügt es, die Funktion t^x zu nehmen und $(k-1)$ sukzessive Ableitungen nach t zu bilden und in den Resultaten t durch a zu ersetzen.

55. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Bei der Auflösung der Gleichung

$$(1) \qquad y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x = 0$$

werden wir zwei Fälle unterscheiden: 1. die entsprechende algebraische Gleichung

$$f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots + p_{n-1} z + p_n = 0$$

hat verschiedene Wurzeln und 2. die Gleichung $f(z) = 0$ hat gleiche Wurzeln.

Wenn wir im ersten Falle die Wurzeln mit

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_n$$

bezeichnen, dann sind nach Nr. 54

$$a_1^x, \quad a_2^x, \ldots, \quad a_n^x$$

partikuläre Lösungen von (1) und nach Nr. 48 genügt

$$(5) \qquad y_x = C_1 a_1^x + C_2 a_2^x + C_3 a_3^x + \cdots + C_n a_n^x$$

der Gleichung bei willkürlichen Werten der Konstanten

$$C_1, \ C_2, \ C_3, \ldots, \ C_n.$$

Um zu beweisen, daß der Ausdruck (5) die allgemeine Lösung ist, genügt es zu zeigen, daß $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sich durch willkürlich gegebene Werte $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ausdrücken lassen.

Um das System

$$(6)\qquad \begin{cases} y_0 = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n, \\ y_1 = C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 + \cdots + C_n a_n, \\ y_2 = C_1 a_1^2 + C_2 a_2^2 + C_3 a_3^2 + \cdots + C_n a_n^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} = C_1 a_1^{n-1} + C_2 a_2^{n-1} + C_3 a_3^{n-1} + \cdots + C_n a_n^{n-1} \end{cases}$$

aufzulösen, werden wir die Gleichungen des Systems mit unbestimmten Faktoren $q_{n-1}, q_{n-2}, q_{n-3}, \ldots, q_0$ multiplizieren und dann addieren. Das Resultat nimmt die Form an

$$(7)\qquad \begin{cases} q_{n-1} y_0 + q_{n-2} y_1 + q_{n-3} y_2 + \cdots + q_0 y_{n-1} \\ = C_1 \varphi(a_1) + C_2 \varphi(a_2) + C_3 \varphi(a_3) + \cdots + C_n \varphi(a_n), \end{cases}$$

wenn man die Bezeichnung

$$(8)\qquad \varphi(z) = q_0 z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + \cdots + q_{n-2} z + q_{n-1}$$

einführt.

Um C_1 zu bestimmen, werden wir $q_0, q_1, \ldots q_{n-1}$ so wählen, daß

$$\varphi(a_1) = 1, \quad \varphi(a_2) = 0, \quad \varphi(a_3) = 0, \ldots, \quad \varphi(a_n) = 0$$

wird. Es ist in diesem Falle

$$\varphi(z) = \frac{(z-a_2)(z-a_3)\ldots(z-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}$$

und die Relation (7) gibt

$$C_1 = q_{n-1} y_0 + q_{n-2} y_1 + \cdots + q_0 y_{n-1}.$$

In derselben Weise lassen sich $C_2, C_3, \ldots, C_n$ durch $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ausdrücken.

Damit ist also bewiesen, daß der Ausdruck (5) wirklich allgemeine Lösung von (1) ist.

Jetzt wollen wir voraussetzen, daß

$$f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots + p_{n-1} z + p_n = 0$$

gleiche Wurzeln besitzt.

In allen einzelnen Fällen ist die Beweisführung dieselbe. Deswegen genügt es, nur einen Fall zu betrachten. Wir werden voraussetzen, daß

$$f(z) = (z-a_1)^3 (z-a_4)(z-a_5) \ldots (z-a_n)$$

ist und daß die Zahlen $a_1, a_4, a_5, \ldots, a_n$ voneinander verschieden sind.

Da wir n partikuläre Lösungen von (1) kennen (Nr. 54), so genügt der Ausdruck

$$(9)\quad \begin{cases} y_x = C_1 a_1^x + C_2 x a_1^{x-1} + C_3 x(x-1) a_1^{x-2} \\ \quad + C_4 a_4^x + C_5 a_5^x + \cdots + C_n a_n^x \end{cases}$$

unsrer Differenzengleichung. Es ist noch zu zeigen, daß das System

$$(10)\begin{cases} y_{n-1} = C_1 a_1^{n-1} + C_2 (n-1) a_1^{n-2} + C_3 (n-1)(n-2) a_1^{n-3} + C_4 a_4^{n-1} + \cdots + C_n a_n^{n-1}, \\ y_{n-2} = C_1 a_1^{n-2} + C_2 (n-2) a_1^{n-3} + C_3 (n-2)(n-3) a_1^{n-4} + C_4 a_4^{n-2} + \cdots + C_n a_n^{n-2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1 = C_1 a_1 \quad + C_2 \cdot 1 \quad + C_3 \cdot 0 \quad + C_4 a_4 \quad + \cdots + C_n a_n, \\ y_0 = C_1 \cdot 1 \quad + C_2 \cdot 0 \quad + C_3 \cdot 0 \quad + C_4 \cdot 1 \quad + \cdots + C_n \cdot 1 \end{cases}$$

in bezug auf $C_1, C_2, \ldots, C_n$ lösbar ist.

Wenn man die Gleichungen (10) mit $q_0, q_1, \ldots, q_{n-2}, q_{n-1}$ multipliziert und zusammenaddiert, so findet man

$$(11)\quad \begin{cases} q_0 y_{n-1} + q_1 y_{n-2} + \cdots + q_{n-2} y_1 + q_{n-1} y_0 \\ = C_1 \varphi(a_1) + C_2 \varphi'(a_1) + C_3 \varphi''(a_1) + C_4 \varphi(a_4) + \cdots + C_n \varphi(a_n). \end{cases}$$

Hier ist

$$\varphi(z) = q_0 z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + \cdots + q_{n-2} z + q_{n-1}.$$

Um C_1 zu bestimmen, genügt es, die Koeffizienten $q_0, q_1, \ldots, q_{n-2}, q_{n-1}$ so zu wählen, daß

$$\varphi(a_1) = 1, \quad \varphi'(a_1) = 0, \quad \varphi''(a_1) = 0, \quad \varphi(a_4) = 0, \ldots, \quad \varphi(a_n) = 0.$$

Um die Gleichungen

$$\varphi(a_4) = 0, \quad \varphi(a_5) = 0, \ldots, \quad \varphi(a_n) = 0$$

zu befriedigen, genügt es, zu setzen

$$(12)\qquad \varphi(z) = (z - a_4)(z - a_5) \ldots (z - a_n) \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ eine willkürliche Funktion ist.

Aus (12) und aus den Bedingungen

$$\varphi(a_1) = 1, \quad \varphi'(a_1) = 0, \quad \varphi''(a_1) = 0$$

folgen die Werte für $\psi(a_1)$, $\psi'(a_1)$, $\psi''(a_1)$. Die Funktion vom niedrigsten Grade, die allen diesen Forderungen genügt, ist

$$\varphi(z) = (z - a_4)(z - a_5) \ldots (z - a_n) \left[\psi(a_1) + (z - a_1)\psi'(a_1) + \frac{(z - a_1)^2}{1 \cdot 2} \psi''(a_1)\right].$$

In derselben Weise lassen sich die Konstanten C_2 und C_3 durch $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ ausdrücken.

Um C_4 zu bestimmen, genügt es, zu setzen

$$\varphi(z) = \frac{(z-a_1)^3(z-a_5)(z-a_6)\ldots(z-a_n)}{(a_4-a_1)^3(a_4-a_5)(a_4-a_6)\ldots(a_4-a_n)}.$$

Ebenso lassen sich die übrigen Konstanten $C_5, C_6, \ldots, C_n$ bestimmen.

Damit ist also bewiesen, daß (9) wirklich eine allgemeine Lösung der vorgelegten Differenzengleichung ist.

Durch die Einführung andrer willkürlicher Konstanten kann diese Lösung eine einfachere Form annehmen. Da der Ausdruck

$$C_1 + C_2 a_1^{-1} x + C_3 a_1^{-2} x(x-1)$$

eine willkürliche Funktion 2ten Grades ist, so kann man ihn durch $A_1 + A_2 x + A_3 x^2$ ersetzen.

Wir bekommen die folgende allgemeine Lösung unsrer Gleichung

$$y_x = (A_1 + A_2 x + A_3 x^2) a_1^x + C_4 a_4^x + \cdots + C_n a_n^x. \tag{13}$$

In allen Fällen gibt es also solche n Lösungen $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}$ der gegebenen homogenen Gleichung, daß man das System

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 u_0^{(1)} + C_2 u_0^{(2)} + \cdots + C_n u_0^{(n)}, \\ y_1 &= C_1 u_1^{(1)} + C_2 u_1^{(2)} + \cdots + C_n u_1^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} &= C_1 u_{n-1}^{(1)} + C_2 u_{n-1}^{(2)} + \cdots + C_n u_{n-1}^{(n)} \end{aligned}$$

in bezug auf $C_1, C_2, \ldots, C_n$ auflösen kann. Deswegen ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} u_0^{(1)} & u_0^{(2)} & \ldots & u_0^{(n)} \\ u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \ldots & u_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n-1}^{(1)} & u_{n-1}^{(2)} & \ldots & u_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} \tag{14}$$

von Null verschieden.

Als Beispiele wollen wir einige Gleichungen mit ihren allgemeinen Lösungen angeben.

$$1.\quad y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0,$$
$$y_x = C_1 \cdot 2^x + C_2 \cdot 3^x.$$

$$2.\quad y_{x+2} - 7y_{x+1} + 6y_x = 0,$$
$$y_x = C_1 + C_2 \cdot 6^x.$$

$$3.\quad y_{x+2} - 6y_{x+1} + 9y_x = 0,$$
$$y_x = (C_1 + C_2 x) \cdot 3^x.$$

56. Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Wenn alle Koeffizienten der Gleichung

$$y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x = 0$$

reell sind, so kann man verlangen, daß in der allgemeinen Lösung keine imaginären Größen auftreten.

Wir werden voraussetzen, daß die entsprechende algebraische Gleichung

$$z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots + p_n = 0$$

eine dreifache komplexe Wurzel hat, die wir mit a_1 bezeichnen. Nach einem Satze der Algebra hat diese Gleichung eine dreifache konjugierte Wurzel, die wir mit a_4 bezeichnen. Die übrigen Wurzeln $a_7, a_8, \ldots, a_n$ sollen reell und voneinander verschieden sein.

Die allgemeine Lösung unsrer Gleichung ist

$$y_x = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) a_1^x + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2) a_4^x$$
$$+ C_7 a_7^x + C_8 a_8^x + \cdots C_n a_n^x.$$

Wenn

$$a_1 = \varrho\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

gesetzt wird, so ist

$$a_4 = \varrho\,(\cos\alpha - i\sin\alpha),$$
$$a_1^x = \varrho^x(\cos x\alpha + i\sin x\alpha),$$
$$a_4^x = \varrho^x(\cos x\alpha - i\sin x\alpha).$$

Deswegen ist

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) a_1^x + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2) a_4^x$$
$$= [(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \quad + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2)]\,\varrho^x \cos\alpha x$$
$$+ [(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\,i \quad - (C_4 + C_5 x + C_6 x^2)\,i]\,\varrho^x \sin\alpha x.$$

Wenn man neue Konstanten einführt

$$A = C_1 + C_4, \qquad A_1 = C_2 + C_5, \qquad A_2 = C_3 + C_6,$$
$$B = (C_1 - C_4)i, \quad B_1 = (C_2 - C_5)i, \quad B_2 = (C_3 - C_6)i,$$

so erscheint die allgemeine Lösung unsrer Gleichung in der Form

$$y_x = \varrho^x \cdot [(A + A_1 x + A_2 x^2) \cos x\alpha + (B + B_1 x + B_2 x^2) \sin x\alpha] \\ + C_7 a_7^x + \cdots + C_n a_n^x,$$

die keine imaginären Größen enthält.

Beispiele:

$$1.\quad y_{x+2} + 2y_{x+1} + 4y_x = 0,$$

$$y_x = 2^x \cdot \left[A \cos\left(x\frac{2\pi}{3}\right) + B \sin\left(x\frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

$$2.\quad y_{x+4} + y_x = 0,$$

$$y_x = C_1 \cos\left(x\frac{\pi}{4}\right) + C_2 \sin\left(x\frac{\pi}{4}\right) + C_3 \cos\left(x\frac{3\pi}{4}\right) + C_4 \sin\left(x\frac{3\pi}{4}\right).$$

57. Vollständige Gleichung. Um die Lösung der vollständigen Gleichung

$$(15)\qquad y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x = Q_x$$

zu suchen, werden wir voraussetzen, daß die Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung

$$z_{x+n} + p_1 z_{x+n-1} p_2 z_{x+n-2} + \cdots + p_n z_x = 0$$

schon bekannt ist. Es sei die allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$z_x = C_1 u_x^{(1)} + C_2 u_x^{(2)} + \cdots + C_n u_x^{(n)}.$$

Statt der willkürlichen Konstanten werden wir unbekannte Funktionen von x einführen, und der Ausdruck

$$(16)\qquad y_x = C_x^{(1)} u_x^{(1)} + C_x^{(2)} u_x^{(2)} + \cdots + C_x^{(n)} u_x^{(n)}$$

soll der vollständigen Gleichung genügen. Eine Bedingung haben wir zu erfüllen und n Funktionen zur Verfügung. Deswegen können wir $n-1$ neue Bedingungen einführen. Lagrange wählt dieselben so, daß $y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+n-1}$ dieselbe Form haben sollen, als ob die C_x Konstante wären.

Da $C_{x+1} = C_x + \Delta C_x$ ist, so finden wir das System von Gleichungen

$$\begin{aligned} y_x &= C_x^{(1)} \cdot u_x^{(1)} + C_x^{(2)} \cdot u_x^{(2)} + \cdots + C_x^{(n)} \cdot u_x^{(n)}, \\ y_{x+1} &= C_x^{(1)} \cdot u_{x+1}^{(1)} + C_x^{(2)} \cdot u_{x+1}^{(2)} + \cdots + C_x^{(n)} \cdot u_{x+1}^{(n)}, \\ y_{x+2} &= C_x^{(1)} \cdot u_{x+2}^{(1)} + C_x^{(2)} \cdot u_{x+2}^{(2)} + \cdots + C_x^{(n)} \cdot u_{x+2}^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{x+n-1} &= C_x^{(1)} \cdot u_{x+n-1}^{(1)} + C_x^{(2)} \cdot u_{x+n-1}^{(2)} + \cdots + C_x^{(n)} \cdot u_{x+n-1}^{(n)}. \end{aligned}$$

Diese Formeln gelten, wenn die Funktionen C_x den Bedingungen genügen

$$(17)\quad \begin{cases} u^{(1)}_{x+1} \cdot \Delta C^{(1)}_x + u^{(2)}_{x+1} \cdot \Delta C^{(2)}_x + \cdots + u^{(n)}_{x+1} \cdot \Delta C^{(n)}_x = 0, \\ u^{(1)}_{x+2} \cdot \Delta C^{(1)}_x + u^{(2)}_{x+2} \cdot \Delta C^{(2)}_x + \cdots + u^{(n)}_{x+2} \cdot \Delta C^{(n)}_x = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ u^{(1)}_{x+n-1} \cdot \Delta C^{(1)}_x + u^{(2)}_{x+n-1} \cdot \Delta C^{(2)}_x + \cdots + u^{(n)}_{x+n-1} \cdot \Delta C^{(n)}_x = 0. \end{cases}$$

Es ist

$$\begin{aligned} y_{x+n} = {} & C^{(1)}_x \cdot u^{(1)}_{x+n} + C^{(2)}_x \cdot u^{(2)}_{x+n} + \cdots + C^{(n)}_x \cdot u^{(n)}_{x+n} \\ & + u^{(1)}_{x+n} \cdot \Delta C^{(1)}_x + u^{(2)}_{x+n} \cdot \Delta C^{(2)}_x + \cdots + u^{(n)}_{x+n} \cdot \Delta C^{(n)}_x, \end{aligned}$$

und es kann nicht mehr y_{x+n} dieselbe Form haben, als ob die C_x konstant wären.

Wenn wir die Werte $y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+n}$ in die gegebene vollständige Gleichung einsetzen, so fallen die Glieder mit $C^{(1)}_x$, $C^{(2)}_x, \ldots, C^{(n)}_x$ weg und es bleibt die Gleichung

$$(18)\qquad u^{(1)}_{x+n} \cdot \Delta C^{(1)}_x + u^{(2)}_{x+n} \cdot \Delta C^{(2)}_x + \cdots + u^{(n)}_{x+n} \cdot \Delta C^{(n)}_x = Q_x.$$

Aus den n Gleichungen (17) und (18) mit den n Unbekannten $\Delta C^{(1)}_x$, $\Delta C^{(2)}_x, \ldots, \Delta C^{(n)}_x$ lassen sich dieselben bestimmen, wenn die Determinante

$$F(x) = \begin{vmatrix} u^{(1)}_{x+1} & u^{(2)}_{x+1} & \cdots & u^{(n)}_{x+1} \\ u^{(1)}_{x+2} & u^{(2)}_{x+2} & \cdots & u^{(n)}_{x+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(1)}_{x+n} & u^{(2)}_{x+2} & \cdots & u^{(n)}_{x+n} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Wir haben schon gesehen (Nr. 55), daß die partikulären Lösungen $u^{(1)}_x, u^{(2)}_x, \ldots, u^{(n)}_x$ der homogenen Gleichung so gewählt werden können, daß die Determinante

$$F(-1) = \begin{vmatrix} u^{(1)}_0 & u^{(2)}_0 & \cdots & u^{(n)}_0 \\ u^{(1)}_1 & u^{(2)}_1 & \cdots & u^{(n)}_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(1)}_{n-1} & u^{(2)}_{n-1} & \cdots & u^{(n)}_{n-1} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null ist.

Aus der Relation

$$u_{x+n} + p_1 u_{x+n-1} p_2 u_{x+n-2} + \cdots + p_{n-1} u_{x+1} + p_n u_x = 0$$

folgt, daß

$$F(x) = \begin{vmatrix} u_{x+1}^{(1)} & u_{x+1}^{(2)} & \dots & u_{x+1}^{(n)} \\ u_{x+2}^{(1)} & u_{x+2}^{(2)} & \dots & u_{x+2}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{x+n-1}^{(1)} & u_{x+n-1}^{(2)} & \dots & u_{x+n-1}^{(n)} \\ -p_n u_x^{(1)} & -p_n u_x^{(2)} & \dots & -p_n u_x^{(n)} \end{vmatrix},$$

weil man zu den Elementen der letzten Zeile die Elemente der vorigen Zeilen, resp. multipliziert mit $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$, addieren kann.

Es besteht also die Relation

$$F(x) = \pm p_n \cdot F(x-1).$$

Wäre $F(x) = 0$, so müßte auch $F(x-1) = 0$ sein, weil p_n nicht Null ist.

Aus denselben Gründen wäre auch

$$F(x-2) = 0, \quad F(x-3) = 0, \dots, \quad F(-1) = 0,$$

was aber nicht der Fall ist.

Es ist also bewiesen, daß $F(x)$ nicht Null ist. Die Gleichungen (17) und (18) sind lösbar. Man findet

$$\Delta C_x^{(1)} = v_x^{(1)}, \quad \Delta C_x^{(2)} = v_x^{(2)}, \dots, \quad \Delta C_x^{(n)} = v_x^{(n)}.$$

Die Summation gibt Resultate von der Form

$$C_x^{(1)} = w_x^{(1)} + C_1, \quad C_x^{(2)} = w_x^{(2)} + C_2, \dots, \quad C_x^{(n)} = w_x^{(n)} + C_n.$$

Demnach ist die Lösung der vollständigen Gleichung

$$y_x = C_1 u_x^{(1)} + C_2 u_x^{(2)} + \dots + C_n u_x^{(n)}$$
$$+ u_x^{(1)} w_x^{(1)} + u_x^{(2)} w_x^{(2)} + \dots + u_x^{(n)} w_x^{(n)}.$$

Es ist die allgemeine Lösung, weil die Determinante (14) von Null verschieden ist.

Diese Methode von Lagrange heißt Variation der willkürlichen Konstanten. (Lagrange, Oeuvres, t. 4, p. 156. Recherches sur les séries récurrentes.)

Als Beispiel nehmen wir die Gleichung

$$y_{x+2} - 7y_{x+1} + 6y_x = x.$$

Wir setzen

$$y_x = C_x^{(1)} + C_x^{(2)} \cdot 6^x.$$

Es ist

$$y_{x+1} = C_x^{(1)} + C_x^{(2)} \cdot 6^{x+1},$$

wenn

$$\Delta C_x^{(1)} + 6^{x+1} \cdot \Delta C_x^{(2)} = 0$$

ist.

Es wird y_x der Gleichung genügen, wenn außerdem

$$\Delta C_x^{(1)} + 6^{x+2} \cdot \Delta C_x^{(2)} = x$$

ist. Daraus folgt

$$\Delta C_x^{(1)} = -\frac{1}{5} x, \quad \Delta C_x^{(2)} = \frac{1}{30} x \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x.$$

Die Summation gibt

$$C_x^{(1)} = -\frac{1}{10} x(x-1) + C_1,$$

$$C_x^{(2)} = -\frac{1}{25} x \left(\frac{1}{6}\right)^x - \frac{1}{125} \left(\frac{1}{6}\right)^x + C_2.$$

Die allgemeine Lösung unsrer Gleichung ist also

$$y_x = C_1 + C_2 \cdot 6^x - \frac{1}{10} x^2 + \frac{3}{50} x - \frac{1}{125}.$$

58. Man kann noch in einer andern Weise von der Lösung der homogenen Gleichung zur vollständigen (15) übergehen. Es genügt, eine partikuläre Lösung der vollständigen Gleichung zu kennen (Nr. 48). Wenn das letzte Glied

$$Q_x = a^x \cdot v_x$$

ist, wo v_x eine ganze Funktion ist, dann ist es leicht, eine solche Lösung zu finden.

Wir setzen

$$Y_x = a^x \cdot u_x,$$

wo u_x eine ganze Funktion ist, und führen diese Größe statt y_x in die vollständige Gleichung ein. Vermöge der Identität (4) findet man die Gleichung

$$a^x f(a) \cdot u_x + a^{x+1} \cdot f'(a) \cdot \Delta u_x + a^{x+2} \cdot f''(a) \cdot \frac{\Delta^2 u_x}{1 \cdot 2} + \cdots$$
$$\cdots + a^{x+n} \cdot f^{(n)}(a) \cdot \frac{\Delta^n u_x}{1 \cdot 2 \ldots n} = a^x \cdot v_x,$$

die zur Bestimmung von u_x dient.

Der Faktor a^x kann gehoben werden und es wird diese Gleichung die Form annehmen

$$(19) \quad f(a) \cdot u_x + a f'(a) \cdot \Delta u_x + a^2 f''(a) \cdot \frac{\Delta^2 u_x}{1 \cdot 2} + \cdots + a^n f^{(n)}(a) \cdot \frac{\Delta^n u_x}{1 \cdot 2 \ldots n} = v_x.$$

Wenn a keine Wurzel der Gleichung

$$f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots + p_n = 0$$

ist, dann ist u_x von demselben Grade wie v_x.

Es sei

$$u_x = \alpha_0 \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots m} + \alpha_1 \frac{x(x-1)\dots(x-m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(m-1)}$$
$$+ \alpha_2 \frac{x(x-1)\dots(x-m+3)}{1\cdot 2\dots(m-2)} + \dots + \alpha_{m-2}\frac{x(x-1)}{1\cdot 2} + \alpha_{m-1}x + \alpha_m,$$
$$v_x = \beta_0 \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots m} + \beta_1 \frac{x(x-1)\dots(x-m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(m-1)}$$
$$+ \beta_2 \frac{x(x-1)\dots(x-m+3)}{1\cdot 2\dots(m-2)} + \dots + \beta_{m-2}\frac{x(x-1)}{1\cdot 2} + \beta_{m-1}x + \beta_m.$$

Die Zahlen β sind gegeben und die α werden gesucht.

Aus (19) findet man durch den Vergleich der Koeffizienten

$$\alpha_0 f(a) = \beta_0,$$
$$\alpha_1 f(a) + \alpha_0 a f'(a) = \beta_1,$$
$$\alpha_2 f(a) + \alpha_1 a f'(a) + \alpha_0 a^2 \frac{f''(a)}{1\cdot 2} = \beta_2,$$
$$\alpha_3 f(a) + \alpha_2 a f'(a) + \alpha_1 a^2 \frac{f''(a)}{1\cdot 2} + \alpha_0 a^3 \frac{f'''(a)}{1\cdot 2\cdot 3} = \beta_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Da $f(a)$ nicht Null ist, so bestimmen sich sukzessive die Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

Wenn a eine $k$fache Wurzel von $f(z) = 0$ ist, so nimmt die Gleichung (19) die Form an

$$a^k f^{(k)}(a)\cdot \frac{\Delta^k u_x}{1\cdot 2\dots k} + a^{k+1}\cdot f^{(k+1)}(a)\cdot \frac{\Delta^{k+1}u_x}{1\cdot 2\dots(k+1)} + \cdots$$
$$+ a^n f^{(n)}(a)\cdot \frac{\Delta^n u_x}{1\cdot 2\dots n} = v_x.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine ganze Funktion m^{ten} Grades, wenn u_x vom $(k+m)^{\text{ten}}$ Grade ist.

Man kann setzen

$$u_x = \alpha_0 \frac{x(x-1)\dots(x-k-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(k+m)} + \alpha_1 \frac{x(x-1)\dots(x-k-m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(k+m-1)} + \cdots$$
$$+ \alpha_{m-1}\frac{x(x-1)\dots(x-k)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(k+1)} + \alpha_m \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k},$$

und zur Bestimmung der Koeffizienten findet man die Gleichungen

$$\alpha_0 a^k \frac{f^{(k)}(a)}{1\cdot 2\dots k} = \beta_0,$$
$$\alpha_1 a^k \frac{f^{(k)}(a)}{1\cdot 2\dots k} + \alpha_0 a^{k+1}\cdot \frac{f^{(k+1)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(k+1)} = \beta_1,$$
$$\alpha_2 a^k \frac{f^{(k)}(a)}{1\cdot 2\dots k} + \alpha_1 a^{k+1}\cdot \frac{f^{(k+1)}(a)}{1\cdot 2\dots(k+1)} + \alpha_0 a^{k+2}\cdot \frac{f^{(k+2)}(a)}{1\cdot 2\dots(k+2)} = \beta_2.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Diese Gleichungen sind lösbar, weil a und $f^{(k)}(a)$ nicht gleich Null sind.

Z. B. wollen wir eine partikuläre Lösung der Gleichung

$$y_{x+2} - 7y_{x+1} + 6y_x = x$$

suchen. Hier ist $a = 1$ und dieser Wert ist eine einfache Wurzel der Gleichung

$$z^2 - 7z + 6 = 0.$$

Deswegen gibt es eine partikuläre Lösung von der Form

$$Y_x = \alpha_0 \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + \alpha_1 x.$$

In die gegebene Gleichung setzen wir ein

$$Y_x = bx + cx^2$$

und wir finden

$$b = \frac{3}{50}, \quad c = -\frac{1}{10}.$$

Nach dem bekannten Satze (Nr. 48) ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$y_x = C_1 + C_2 \cdot 6^x + \frac{3}{50}x - \frac{1}{10}x^2.$$

Die Gleichung

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 1$$

hat eine partikuläre Lösung von der Form

$$Y_x = \alpha_0.$$

Aus der Gleichung

$$\alpha_0 - 5\alpha_0 + 6\alpha_0 = 1$$

folgt, daß $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ ist. Deswegen ist die allgemeine Lösung unsrer Gleichung

$$y_x = C_1 \cdot 2^x + C_2 \cdot 3^x + \frac{1}{2}.$$

Wir wollen jetzt einige Anwendungen der Differenzengleichungen höherer Ordnung zeigen.

59. Rekurrente Reihen. Dies sind solche Reihen

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_x, y_{x+1}, \ldots,$$

für die je n aufeinander folgende Glieder einer Relation

$$y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x = 0$$

mit konstanten Koeffizienten genügen.

Die Auflösung dieser Differenzengleichung dient dazu, um das allgemeine Glied y_x als Funktion von x darzustellen.

Als Beispiel wollen wir die Reihe betrachten

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots,$$

deren jedes Glied die Summe der beiden vorhergehenden Glieder ist. Je drei nacheinander folgende Glieder sind durch die Relation verbunden

$$y_{x+2} - y_{x+1} - y_x = 0.$$

Die Anfangswerte sind

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$z^2 - z - 1 = 0$$

sind

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Deswegen ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$y_x = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x.$$

Wenn C_1 und C_2 durch die Anfangswerte y_0 und y_1 bestimmt werden, findet man, daß das allgemeine Glied unsrer Reihe

$$y_x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right]$$

ist.

Die Potenzreihe

$$F(t) = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 + \cdots + y_x t^x + \cdots,$$

deren Koeffizienten eine rekurrente Reihe bilden, ist gleich einer rationalen Funktion von t. Die Relation zwischen den n Koeffizienten der Reihe sei

$$y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x = 0.$$

Nach Multiplikation von $F(t)$ mit

$$1 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n$$

findet man

$$y_0 + (y_1 + p_1 y_0)t + (y_2 + p_1 y_1 + p_2 y_0)t^2 + (y_3 + p_1 y_2 + p_2 y_1 + p_3 y_0)t^3 + \\ \cdots + (y_{n-1} + p_1 y_{n-2} + p_2 y_{n-3} + \cdots + p_{n-1} y_0)t^{n-1}.$$

Die Koeffizienten der folgenden Potenzen sind die Werte der Funktion

$$y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x$$

für $x = 0, 1, 2, \ldots$ Deswegen sind alle diese Koeffizienten gleich Null.

Umgekehrt, die rationale Funktion

$$\frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}}{1 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n}$$

läßt sich in die Reihe

$$y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \cdots + y_x t^x + \cdots$$

entwickeln, für die je n aufeinander folgende Koeffizienten durch die Relation

$$y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x = 0$$

verbunden sind. Die n ersten Koeffizienten bestimmen sich aus den Gleichungen

$$y_0 = a_0,$$
$$y_1 + p_1 y_0 = a_1,$$
$$y_2 + p_1 y_1 + p_2 y_0 = a_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{n-1} + p_1 y_{n-2} + p_2 y_{n-3} + \cdots + p_{n-1} y_0 = a_{n-1}.$$

Also können die Differenzengleichungen dazu dienen, um die Koeffizienten der Entwicklungen rationaler Funktionen in Potenzreihen zu bestimmen.

60. Tschebyscheffscher Beweis eines Satzes von Lamé. In seinen Vorlesungen zeigte Tschebyscheff die folgende Anwendung der Differenzengleichungen.

Man soll bestimmen, wie groß die Anzahl der sukzessiven Divisionen sein kann, um den größten gemeinschaftlichen Teiler zweier Zahlen a und b zu finden.

Es sei

$$a = bq_1 + r_1, \quad b = r_1 q_2 + r_2, \quad \ldots, \quad r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, \quad r_n = 0.$$

Die Anzahl der Divisionen ist hier n.

Weil alle Quotienten größer oder gleich Eins sind, so ist

$$a \geqq b + r_1, \quad b \geqq r_1 + r_2, \quad r_1 \geqq r_2 + r_3, \ldots,$$
$$\ldots r_{n-3} \geqq r_{n-2} + r_{n-1}, \quad r_{n-2} \geqq r_{n-1}, \quad r_{n-1} \geqq 1.$$

Daraus folgen die Beziehungen

$$r_n = 0, \quad r_{n-1} \geqq 1, \quad r_{n-2} \geqq 1, \quad r_{n-3} \geqq 2,$$
$$r_{n-4} \geqq 3, \quad r_{n-5} \geqq 5, \quad r_{n-6} \geqq 8, \ldots$$

Wenn wir die Zahlen

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 1, \quad y_x = 2, \ldots, \quad y_x = y_{x-1} + y_{x-2}, \ldots$$

einführen, so ist

$$r_n = y_0, \quad r_{n-1} \geqq y_1, \quad r_{n-2} \geqq y_2, \ldots, \quad b \geqq y_n.$$

Wenn für eine ganze positive Zahl m die Ungleichheit

$$y_m > b$$

besteht, dann ist notwendig $y_m > y_n$ und $m > n$. Die gesuchte Anzahl der Divisionen ist also kleiner als eine solche Zahl m, für die

$$y_m > b$$

ist. Den Ausdruck für y_x kennen wir schon aus Nr. 59. Es ist deswegen die Ungleichheit

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right] > b$$

aufzulösen.

Da

$$\sqrt{5} = 2,\ 2 \ldots; \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,\ 6 \ldots; \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,\ 6 \ldots,$$

so können wir y_x annähernd in der Weise ausdrücken

$$y_x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x \pm \theta,$$

wo θ zwischen 0 und 1 ist.

Wenn

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m \geqq b + 1$$

ist, dann ist

$$y_m \geqq b + (1 \pm \theta) \text{ und folglich } y_m > b.$$

Es genügt

$$m \geqq \frac{\log\,[2,\ 2 \cdot (b+1)]}{\log 1,\ 6}$$

zu nehmen. Wenn die Zahl b aus k Ziffern besteht, dann ist der gemeine Logarithmus von $2,\ 2 \cdot (b+1)$ ungefähr gleich k, $\log 1,\ 6$ ist beinahe $\frac{1}{5}$ und

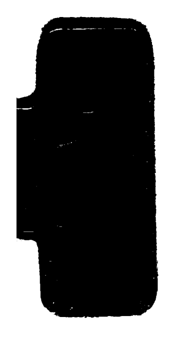
$$m \geqq 5k.$$

Daraus folgt der Satz von G. Lamé: Die Anzahl der Divisionen, die auszuführen ist, um den größten gemeinschaftlichen Teiler der Zahlen a und b ($a > b$) zu finden, ist kleiner als die fünffache Anzahl der Ziffern der Zahl b.

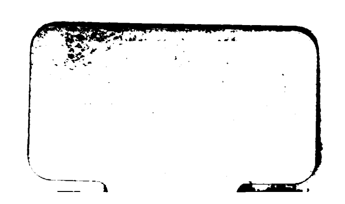
Lamé hat diesen Satz auf elementarem Wege bewiesen. (Paris. Comptes rendus, 19. [1844], p. 867.)

Druck von B. G. Teubner in Dresden.






SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV·ANG·
VE
RI
TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE



VORLESUNGEN

ÜBER

MATHEMATISCHE NÄHERUNGSMETHODEN

VON

DR. OTTO BIERMANN
O. Ö. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER DEUTSCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN BRÜNN

MIT 35 EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN
1905

ANKÜNDIGUNG.

Das vorliegende Buch kommt einem wirklichen Bedürfnis entgegen, da es an einem Lehrbuch, das die für weite Kreise der Techniker und Naturforscher unentbehrlichen approximativen Rechnungsmethoden in einer einheitlichen, übersichtlichen Gestalt und in einer für den praktischen Gebrauch geeigneten Form behandelt, bisher gefehlt hat.

Aber auch dem Theoretiker, der sich mit den verschiedenen Näherungsrechnungen und -Methoden vertraut machen muß, wird das Buch, abgesehen von dem hohen Interesse, den der darin bearbeitete Stoff an sich darbietet, als ein den Gegenstand gründlich und erschöpfend behandelnder Leitfaden willkommen sein.

Braunschweig, im Juli 1905.

Friedrich Vieweg und Sohn.

VORLESUNGEN

ÜBER

MATHEMATISCHE NÄHERUNGSMETHODEN



⊙

VORLESUNGEN

ÜBER

MATHEMATISCHE NÄHERUNGSMETHODEN

VON

DR. OTTO BIERMANN

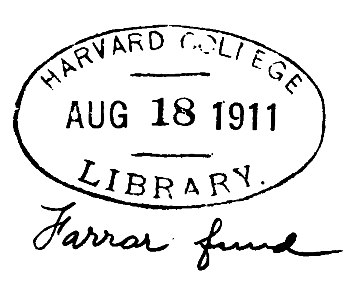
O. Ö. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER DEUTSCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN BRÜNN

MIT 35 EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1905


HARVARD COLLEGE
AUG 18 1911
LIBRARY.

VORWORT.

In letzter Zeit wurde den Bedürfnissen derer, die mathematische Überlegungen anzuwenden haben, in vieler Beziehung Rechnung getragen, und darum ist es auffallend, daß noch kein Buch besteht, das mathematische Näherungsmethoden in einer einheitlichen, übersichtlichen Gestalt und in einer Form behandelt, die nicht viele mathematische Kenntnisse voraussetzt.

Weil ich bereits sechs Studienjahre Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden an einer technischen Hochschule und zwar solchen Hörern gehalten habe, die schon einen ersten Kurs über Mathematik gehört hatten, so machte ich viele Erfahrungen über eine wünschenswerte Behandlung dieses Gegenstandes und danach übergebe ich meine Vorlesungen nunmehr der Öffentlichkeit in der Zuversicht, daß ich damit weiteren Bedürfnissen und Wünschen solcher Techniker und Naturforscher nachkomme, die zu rechnen haben.

Den Wünschen und Neigungen aller Fachmänner konnte ich gewiß nicht zugleich nachkommen, denn es ist naturgemäß, daß der eine diese, der andere jene Rechnungsmethode vorzieht, und ein Handbuch wollte und konnte ich bei der früher genannten Absicht nicht schreiben.

Nun komme ich der Aufgabe freudig nach, meinem Assistenten Herrn Dr. Benze für seine große Hilfeleistung zu danken. Er widmete mir zur Vollendung des Buches nicht allein bei Herstellung des Manuskriptes und der Zeichnungen seine Kräfte

sondern leistete mir auch bei den Korrekturen durch sachliche Abänderungsvorschläge hervorragende Dienste, die ich an anderen Orten hervorzuheben teilweise Gelegenheit nahm.

Außerdem fühle ich mich für das mir von der Verlagshandlung Friedr. Vieweg & Sohn stets bewiesene Entgegenkommen zu besonders verbindlichem Danke verpflichtet.

Brünn, im Mai 1905.

Der Verfasser.

INHALTSVERZEICHNIS.

Erster Abschnitt.

Das Rechnen mit genauen und ungenauen Zahlen.

Zweiter Abschnitt.

Das rechnerische Prinzip in der höheren Analysis.

Dritter Abschnitt.

Näherungsweise Auflösung von Gleichungen.

Vierter Abschnitt.

Interpolations- und Differenzenrechnung.

Erste Abteilung.

Die ganze rationale Funktion als Interpolationsfunktion.

Zweite Abteilung.

Differenzenrechnung.

Dritte Abteilung.

Die ganze Interpolationsfunktion zweier Variablen.

Vierte Abteilung.

Die trigonometrische Interpolationsfunktion.

Fünfter Abschnitt.

Anwendung der Interpolationsrechnung auf die näherungsweise Quadratur und Kubatur.

Sechster Abschnitt.

Einige mathematische Instrumente.

Nachtrag.

Berichtigungen und Verbesserungen.

S. 6, Z. 3 v. u. lies: nach höchstens n Schritten.
S. 40, Z. 1 v. u. lies: der Lufttemperatur an einem Orte zu der Zeit,
S. 69, Z. 21 u. 22 v. o. lies statt p_3 und $p^{(1,2)}$ $p^{(1,2)}$ und p_3.
S. 70, Z. 7 v. o. lies: P_m statt P.
S. 71, Z. 13 v. u. lies: solchen statt solcher.
S. 73, Z. 11 v. u. lies: gewinnen will statt haben will.
S. 75, Z. 20 v. o. lies: a bzw. $-c$ statt a.
S. 76, Z. 11 v. u. lies nach verbinden: , wenn $n > 3$ ist.
S. 93, Z. 9 v. u. lies: $(\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$.
S. 100, Z. 3 v. o. lies: „zweier“ in dem Integrationsintervalle einschließlich der Grenzen endlichen und stetigen „Faktoren“.
S. 183, Z. 1 v. u. lies: S. 138 statt 177.
S. 206, Z. 12 v. u. lies: B statt b.

Erster Abschnitt.

Das Rechnen mit genauen und ungenauen Zahlen[1]).

§ 1. Einleitung.

Es seien nach dem aus den Größen

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{3}{10}, \quad c_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2}, \quad c_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3}$$

ersichtlichen Bildungsgesetze Größen

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots \quad c_n, \quad \ldots$$

hergestellt. Diese erfüllen folgende Eigenschaften: Weil die Größe c_n durch die geometrische Reihe definiert ist:

$$c_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n},$$

und nach einer wohlbekannten Formel

$$c_n = \frac{3}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

wird, so kann man nach Angabe einer willkürlich kleinen positiven Größe δ eine ganze Zahl m von] der Art finden, daß für jede ganze Zahl $n \geqq m$ und für jede ganze Zahl $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ die Differenzen

$$c_{n+\nu} - c_n = \frac{1}{3.10^n}\left(1 - \frac{1}{10^\nu}\right) < \delta$$

werden.

---

[1]) Mehmke, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, S. 938.

Je nach der Größe von δ fällt m verschieden aus; so wird z. B. für

$$\delta = \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^6}$$

m bzw. gleich 3 oder 6.

Außerdem ist noch ersichtlich, daß die Größen c_n schließlich, d. h. bei genügend großem n, von $\frac{1}{3}$ um weniger verschieden sind, als wie eine beliebig kleine positive Größe anzeigt. Man nennt $\frac{1}{3}$ die Grenze der c_n.

Allgemein sagt man, eine Reihe von Größen $c_0, c_1, c_2, \ldots$ die nach einem bestimmten Gesetze hergestellt seien, bildet eine konvergente Zahlenfolge, wenn nach Angabe einer willkürlich kleinen positiven Größe δ eine solche positive ganze Zahl m ausfindig gemacht werden kann, daß für jede ganze Zahl $n \geqq m$ und für jede beliebige ganze Zahl $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ der absolute Betrag der Differenzen $c_{n+\nu} - c_n$ kleiner wird als δ, was symbolisch in der Form angezeigt werde:

$$| c_{n+\nu} - c_n | < \delta$$ [1]).

Danach ist die frühere besondere Größenfolge eine konvergente Zahlenfolge.

In der reinen Mathematik wird nun eine zu berechnende Größe x von vorgegebener Eigenschaft als bekannt angesehen oder als gefunden betrachtet, wenn man eine Methode zur Ermittelung einer Größenreihe

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots$$

anzugeben vermag, die eine konvergente Zahlenfolge bildet, und deren Glieder x_n die Eigenschaft der verlangten Größe bei größer werdendem n immer näher, genauer erfüllen.

Soll z. B. die der Gleichung $x^2 - 2 = 0$ genügende positive Größe ermittelt werden, oder soll, wie man sagt, die positive zweite Wurzel aus 2 (soll $\sqrt{2}$) gefunden werden, so besteht eine Methode zur Bestimmung einer Größenreihe der verlangten Art darin, daß man zunächst die größte ganze Zahl a_0 sucht, für die $2 - a_0^2 > 0$ wird, und x_0 dieser ganzen Zahl gleichsetzt; dann die größte ganze Zahl a_1 kleiner als 10 sucht, für die

---

[1]) Unter dem absoluten Betrag der positiven, bzw. negativen Größe b versteht man die positive Größe $\pm b$ und bezeichnet den Betrag mit $|b|$.

$$2 - \left(x_0 + \frac{a_1}{10}\right)^2 > 0$$

wird, und x_1 der sich ergebenden Zahl von der Form

$$x_0 + \frac{a_1}{10}$$

gleichsetzt; hierauf die größte ganze Zahl a_2 kleiner als 10 sucht, für die

$$2 - \left(x_1 + \frac{a_2}{10^2}\right)^2 > 0$$

wird, und x_2 der Zahl von der Form

$$x_1 + \frac{a_2}{10^2}$$

gleichsetzt, usw.

Es wird so

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + \frac{4}{10}, \quad x_2 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2},$$

$$x_3 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} \text{ usw.}$$

Diese Größenreihe bildet eine konvergente Zahlenfolge, d. h. wieder kann man nach Angabe einer willkürlich kleinen positiven Größe δ eine positive ganze Zahl m so bestimmen, daß für jede ganze Zahl $n \geqq m$ und für jedes $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$|\, x_{n+\nu} - x_n \,| < \delta$$

wird.

Die Größen x_n erfüllen aber auch die Eigenschaft der verlangten Größe immer genauer, d. h. mit wachsendem n wird $2 - x_n^2$ immer kleiner; so wird

$$2 - x_0^2 = 1, \quad 2 - x_1^2 = \frac{4}{10^2}, \qquad 2 - x_2^2 = \frac{119}{10^4},$$

$$2 - x_3^2 = \frac{604}{10^6} \text{ usw.}$$

Ist eine Vorschrift zur Angabe einer Größe von bestimmter Eigenschaft bekannt, so kann man diese, so wie früher die positive zweite Wurzel aus 2 so genau angeben, als nur irgend verlangt wird; z. B. findet man

$$\sqrt{2} = 1{\cdot}414\,213\,562 \ldots.$$

Durch eine konvergente Zahlenfolge

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots$$

wird eine Zahlengröße c definiert, die eine rationale oder irrationale sein kann, und zwar ist

$$c = \lim_{\nu = \infty} c_\nu,$$

d. h. die durch die Zahlenfolge definierte Größe c ist die Grenze der Größen c_ν, und das will sagen:

$$| c - c_\nu |$$

wird für genügend große ν kleiner als jede noch so kleine vorgegebene positive Größe. Es ist also im ersten Beispiele

$$c = \frac{1}{3},$$

im zweiten

$$\sqrt{2} = \lim_{\nu = \infty} x_\nu.$$

In mathematischen Problemen wird nun eine irrationale Zahl entweder nur symbolisch eingeführt, oder sie wird, wenn sie wie in dem letzten Beispiele durch einen Dezimalbruch dargestellt wird, näherungsweise durch eine in einer endlichen Anzahl von Bestandteilen der Form $a_\mu 10^\mu$ und $\frac{a_{-\mu}}{10^\mu}$, wo die ganzen Zahlen a_μ und $a_{-\mu}$ kleiner als 10 sind, mit ihr übereinstimmende rationale Zahl ersetzt, die um weniger als eine der Größe nach anzugebende rationale Zahl δ von ihr abweicht[1]). Wird z. B. $\sqrt{2}$ durch x_3 ersetzt, so weicht diese Größe von $\sqrt{2}$ um weniger als $\frac{1}{10^3}$ ab, und zwar ist $x_3 < \sqrt{2}$; ersetzt man aber $\sqrt{2}$ durch $x_3 + \frac{1}{10^3}$, so weicht auch diese rationale Zahl von $\sqrt{2}$ um weniger als $\frac{1}{10^3}$ ab, doch ist sie größer als $\sqrt{2}$.

Wie solche Näherungswerte irrationaler Zahlen in die Rechnung aufgenommen werden, so sind oft auch durch Beobachtungen gewonnene, also fehlerhafte, d. h. wieder ungenaue Angaben in der Rechnung enthalten.

[1]) Die irrationale Zahl könnte auch anders, z. B. durch einen Kettenbruch dargestellt sein, doch gehen wir hierauf nicht ein.

Soll dann aber eine von irrationalen und Beobachtungsgrößen abhängige Größe, z. B. der wahrscheinlichste Wert der Präzisionskonstanten h aus dem aus n Beobachtungen einer und derselben Größe l sich ergebenden mittleren Fehler μ bestimmt werden, wo also

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mu} \qquad \text{und} \qquad \mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$$

gilt, und hier in üblicher Weise mit

$$[\lambda\lambda] = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \lambda_\nu^2$$

die Summe der Quadrate der scheinbaren Fehler der Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_n$, d. h. ihrer Abweichungen von dem arithmetischen Mittel derselben

$$\lambda = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n},$$

bezeichnet ist, so wird man vor Ausführung der Rechnung nicht allein statt der irrationalen Zahlen ($\sqrt{2}$), sondern auch statt der mit den ungenauen Beobachtungen zusammenhängenden Größen (μ) angenäherte rationale Zahlen setzen, und da drängen sich die Fragen auf:

1. Wie groß ist der einem Rechnungsergebnisse anhaftende Fehler, wenn die Fehler der in der Rechnung verwendeten Größen angegebene Werte nicht übersteigen.

2. Wie weit dürfen Zahlen ungenau gewählt werden, damit in dem Rechnungsergebnisse eine vorgeschriebene Genauigkeit erreicht wird.

3. Wie muß man endlich die Rechnung einrichten, damit bei dem geringsten Aufwand von Rechnung in dem Ergebnisse eine vorgeschriebene Genauigkeit erreicht wird.

Nach dieser in die ersten Aufgaben einführenden Einleitung wenden wir uns zu den vier Rechnungsarten[1]).

§ 2. Addition.

Eine aus gleichartigen Elementen, wie der abstrakten Einheit 1, gebildete ganze Zahl a läßt gegenüber einer aus der-

[1]) Vgl. Lüroth, Vorlesungen über Numerisches Rechnen. 1900.

selben Einheit gebildeten ganzen Zahl $\alpha \geqq 2$ die Darstellung zu:

$$a = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0,$$

wo α die Basis dieser sog. systematischen Schreibweise heißt, und wo die positiven ganzen Zahlen

$$a_n, \quad a_{n-1}, \quad \ldots \quad a_1, \quad a_0,$$

die alle kleiner als α sind, Ziffern genannt werden. Das Glied $a_\nu \alpha^\nu$ wird das vom Range ν und a_ν die Ziffer des Gliedes vom νten Range genannt. Ferner heiße noch a eine Zahl vom Range n, wenn in ihr kein Glied von höherem als dem $n$ten Range vorkommt.

Beweis: Ist $a \geqq \alpha$, und im Gegenteile hätte man nichts mehr zu beweisen, so wird a entweder einer Potenz von α gleichkommen oder zwischen zwei aufeinander folgenden Potenzen liegen:

$$\alpha^n < a < \alpha^{n+1}.$$

In diesem weiterhin allein zu erwägenden Falle wird entweder

$$a = \alpha^n a_n,$$

wo a_n eine ganze Zahl kleiner als α ist, oder aber

$$a = \alpha^n a_n + r_0,$$

wo noch $r_0 < \alpha^n$ gilt.

Ist hier $r_0 \geqq \alpha$, so muß ebenso

$$r_0 = a_{n_1} \alpha^{n_1}$$

oder

$$r_0 = a_{n_1} \alpha^{n_1} + r_1$$

sein, wo nach den Voraussetzungen die ganze Zahl $n_1 < n$ ist, und wieder

$$1 \leqq a_{n_1} < \alpha, \quad \text{aber} \quad r_1 < \alpha^{n_1}$$

gelten wird. In gleicher Weise wird im Falle $r_1 \geqq \alpha$

$$r_1 = a_{n_2} \alpha^{n_2} \quad \text{oder} \quad r_1 = a_{n_2} \alpha^{n_2} + r_2$$

sein, wo wieder $n_2 < n_1$ ist und

$$1 \leqq a_{n_2} < \alpha, \qquad r_2 < \alpha^{n_2}$$

gelten wird.

So weitergehend gelangt man nach höchstens Schritten zu einem Reste $r_n < \alpha$ und zu der früheren systematischen Darstellung von a.

Indem wir $\alpha = 10$ setzen, erhalten wir das **dekadische** oder **Dezimalsystem**. Wir schreiben die ganze Zahl a aber auch in der Art, daß wir die Ziffern a_n, a_{n-1}, ... a_1, a_0 der Glieder $n$ten, $(n - 1)$sten, ... 1sten und 0ten Ranges von links nach rechts angeordnet, ohne Trennungszeichen nebeneinander setzen:

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 = a.$$

Sollen hierauf zwei oder mehrere Zahlen a und

$$b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0 = b,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0 = d,$$

die nur wegen der einfacheren Schreibweise alle $(n + 1)$-ziffrig gewählt sind, addiert werden, so wird die Vereinigung dadurch vollzogen, daß man bildet

$$10^n (a_n + b_n + \cdots + d_n) + 10^{n-1} (a_{n-1} + b_{n-1} + \cdots + d_{n-1}) + \cdots + (a_0 + b_0 + \cdots + d_0)$$

und die Klammergrößen selbst systematisch schreibt, dabei aber die Glieder gleichen Ranges zusammennimmt, so daß es besser ist, zuerst die Glieder nullten Ranges, dann die ersten Ranges zu vereinigen usw.

Z. B. ist $\quad 7438 + 5196 + 817 =$

$$= (8 + 6 + 7) + 10 (3 + 9 + 1) + 10^2 (4 + 1 + 8) + 10^3 (7 + 5)$$
$$= (1 + 2 . 10) + 10 (3 + 1 . 10) + 10^2 (3 + 1 . 10) + 10^3 (2 + 1 . 10)$$
$$= 1 + 5 . 10 + 4 . 10^2 + 3 . 10^3 + 1 . 10^4 = 13\,451.$$

Doch bequemer führt man diese Aufgabe aus, indem man die Summanden so untereinander schreibt, daß die Ziffern gleichen Ranges untereinander stehen, und dann diese vereinigt, zuerst die Einer, dann die Zehner usw., wobei man zu den Zehnern gleich die hinzunimmt, die bei der Addition der Einer auftreten, zu den Hundertern die hinzunimmt, die bei der Vereinigung der früher schon ergänzten Summe von Zehnern auftreten usw. Z. B.:

$$\begin{array}{r} 7\,438 \\ 5\,196 \\ 817 \\ \hline 13\,451 \end{array}$$

Hier gibt es 21 Einer, und von diesen nimmt man die zwei Zehner zu den 13 untereinander stehenden Zehnern, schreibt also

als Ziffern nullten und ersten Ranges 1 und 5 und fügt zu den 13 Hundertern einen hinzu, hat daher die Ziffer 4 vom Range 2 und noch 13 Tausender.

Doch weil diese Additionsvorschrift ganz geläufig ist, so sei hier nur mehr die wohl auch allgemein bekannte Neunerprobe zur Prüfung des Additionsergebnisses hinzugefügt, aus deren Zutreffen zwar nicht auf die Richtigkeit der Addition geschlossen, aber doch mit sehr großer Wahrscheinlichkeit auf die Richtigkeit gerechnet werden kann.

Man bilde in jedem, wie in dem früheren Falle, die Ziffernsumme jedes Summanden oder die sog. Quersummen 22, 21, 16 und bilde deren Reste bei der Division durch 9. Diese kommen den Ziffernsummen der schon gebildeten Quersummen gleich 4, 3, 7. In der Tat die Schreibweise von a

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 = \\ = (10^n - 1) a_n + \cdots + (10^1 - 1) a_1 + (a_n + \cdots + a_1 + a_0)$$

läßt ersehen, daß die Ziffernsumme von a

$$q(a) = a_n + \cdots + a_1 + a_0$$

bei der Division durch 9, darum weil $10^\nu - 1$ durch $10 - 1 = 9$ teilbar ist, denselben Rest zuläßt wie a.

Der Rest, den nun aber die Summe der Reste $4 + 3 + 7$ bei der Division durch 9 läßt, nämlich 5, ist gleich dem Reste der Ziffernsumme der Summe der vorgegebenen Summanden bei der Teilung durch 9. Haben nämlich die Summanden $a, b, \dots d$ die Quersummen

$$q(a), \quad q(b), \quad \dots \quad q(d),$$

so hat die schon früher angeschriebene Summe von $a, b, \dots d$ die Quersumme

$$(a_n + b_n + \cdots + d_n) + (a_{n-1} + b_{n-1} + \cdots + d_{n-1}) + \cdots \\ + (a_0 + b_0 + \cdots + d_0) = q(a) + q(b) + \cdots + q(d)$$

und es ist wirklich der Rest der Summe bis auf ein Vielfaches von 9 gleich der Summe der Reste der Summanden.

Über die Subtraktion hat man nicht mehr zu bemerken, als daß die Glieder gleichen Ranges voneinander subtrahiert werden und daß dann, wenn hierbei der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, zu dem Minuend eine Einheit der nächst höheren Rangziffer in der Form von zehn Einheiten der zu vermindernden Rangziffer hinzugezählt werden.

§ 3. Multiplikation.

Nach dem distributiven Multiplikationsgesetze

$$(a+b)c = ac + bc$$

ist das Produkt der zwei Zahlen

$$\begin{aligned} a &= a_n\, 10^n + \cdots + a_1 . 10 + a_0, \\ b &= b_m\, 10^m + \cdots + b_1 . 10 + b_0, \end{aligned}$$

wo $m \gtreqless n$ sei,

$$\begin{aligned} ab = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)\, b_m\, 10^m &+ \\ + (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)\, b_{m-1}\, 10^{m-1} &+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)\, b_0. \end{aligned}$$

Bei der Ausführung der hier enthaltenen Operationen hat man also die Zahl a mit jedem Gliede von b zu multiplizieren und die hierbei hervorgehenden Produkte zu vereinigen. Man liest zu diesem Zwecke die Produkte $a_\nu\, b_\mu$ dekadisch und schreibt die in den früheren Zeilen enthaltenen Teilsummen so untereinander, daß die Ziffern gleichen Ranges untereinander zu stehen kommen, läßt die Nullen rechts als überflüssig gleich weg und addiert dann. Hierbei ist es von Vorteil und methodisch empfehlenswert, zuerst mit der Ziffer vom höchsten Range und dann mit den folgenden zu multiplizieren. So wird:

$$97 \times 138 = 97 \times 1 . 10^2 + 97 \times 3 . 10 + 97 \times 8 =$$

```
 97 × 138
---------
 97
 291
  776
---------
13386
```

Man kann aber den Gliedern des früheren Aggregates, das ab beschreibt, auch eine andere übersichtliche Anordnung geben, indem man sie nach fallenden, d. h. abnehmenden Potenzen von 10 anordnet. Wenn man der einfacheren Schreibweise wegen noch $m = n$ setzt, erhält man:

$$\begin{aligned} ab = a_n b_n\, 10^{2n} + (a_n b_{n-1} + a_{n-1} b_n)\, 10^{2n-1} + \cdots \\ + (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n)\, 10^n + (a_{n-1} b_0 + \cdots \\ + a_0 b_{n-1})\, 10^{n-1} + \cdots + (a_1 b_0 + a_0 b_1)\, 10 + a_0 b_0. \end{aligned}$$

Führt man die in den Klammern stehenden Ausdrücke im Kopfe aus, das sind also die naturgemäß höchstens zweizifferigen Produkte

$$a_n b_n = c_1^{(2n)} 10 + c_0^{(2n)} \quad \text{und} \quad a_0 b_0 = c_1^{(0)} 10 + c_0^{(0)}$$

und die anderen bei der Ausführung den Rang 2 gewiß nicht überschreitenden Aggregate von der Gestalt

$$c_2^{(\varkappa)} 10^2 + c_1^{(\varkappa)} 10 + c_0^{(\varkappa)}, \quad (\varkappa = 2n - 1,\ 2n - 2, \ldots 1),$$

die wir in der Form schreiben:

$$\begin{array}{ccc} & & c_0^{(\varkappa)} \\ & c_1^{(\varkappa)} & \\ c_2^{(\varkappa)} & & \end{array},$$

sowie die früheren Produkte in der Gestalt

$$\begin{array}{cc} & c_0^{(2n)} \\ c_1^{(2n)} & \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{cc} & c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} & \end{array},$$

so wird das Produkt $a\,b$ in der Summe der drei Zahlen zu finden sein:

$$\begin{array}{ccccccccc} & c_0^{(2n)} & c_0^{(2n-1)} & \ldots & c_0^{(3)} & c_0^{(2)} & c_0^{(1)} & c_0^{(0)}, \\ c_1^{(2n)} & c_1^{(2n-1)} & c_1^{(2n-2)} & \ldots & c_1^{(2)} & c_1^{(1)} & c_1^{(0)}, & \\ c_2^{(2n-1)} & c_2^{(2n-2)} & c_2^{(2n-3)} & \ldots & c_2^{(1)}, & & & \end{array}$$

wo die Glieder gleichen Ranges schon untereinander geschrieben sind.

Diese Angaben sind richtig, wenn man nur Zahlen miteinander multipliziert, die weniger als 13 Ziffern haben, denn nur im gegenteiligen Falle können Klammerausdrücke der früheren Art vom Range 3 entstehen.

Danach hat man die Produktbildung von 857 und 432 in folgender Art zu schreiben:

$$\begin{array}{r} 857 \\ 432 \\ \hline 24914 \\ 34531 \\ \hline 370224, \end{array}$$

wo

$$8 \times 4 = 32, \quad 8 \times 3 + 5 \times 4 = 44,$$
$$8 \times 2 + 5 \times 3 + 7 \times 4 = 59, \quad 5 \times 2 + 7 \times 3 = 31,$$
$$7 \times 2 = 14$$

in der früheren Art angeordnet und addiert wurden.

Ebenso ist die Produktbildung von 8749 und 891 in folgender Weise auszuführen:

$$\begin{array}{l} \;\;8749 \\ \;\;\;891 \\ \hline 0483559 \\ 62018 \\ 111 \\ \hline 7795359, \end{array}$$

und hierzu ist gerechnet:

$$\begin{array}{rl} 8.0 = 0, & \\ 8.8 + 7.0 = 64, & \\ 8.9 + 7.8 + 4.0 = 128, & \\ 8.1 + 7.9 + 4.8 + 9.0 = 103, & \\ 7.1 + 4.9 + 9.8 = 115, & \\ 4.1 + 9.9 = \;\;85, & \\ 9.1 = \;\;\;9, & \end{array}$$

in der früheren Art angeschrieben und addiert.

Man vermeidet also bei dieser sog. symmetrischen Multiplikationsmethode die schriftliche Angabe des Produktes des Multiplikanden mit jedem Gliede des Multiplikators. Doch weil im Falle einer längeren Multiplikation bei der Bildung der Klammerausdrücke ein Irrtum leicht möglich sein kann, so bediene man sich der Vorschrift von Fourier[1]). Man schreibe den Multiplikator mit verkehrter Anordnung der Ziffern auf einen Papierstreifen, setze ihn so über den in horizontaler Stellung zu denkenden Multiplikanden, daß die Ziffern der höchsten Rangzahlen der Faktoren übereinander stehen, und verschiebe den Streifen nach rechts. Dann hat man nach und nach die Summe der Produkte der untereinander stehenden Ziffern zu bilden. So erhält man in dem letzten Beispiele die Anordnungen:

```
198          198          198
  8749,       8749,        8749,

   198          198          198
  8749,       8749 ,       8749
```

Die einzelnen Aggregate zur Produktbildung schreibe man in genannter Weise unter einen unter dem Multiplikanden zu ziehenden horizontalen Strich.

---

[1]) Fourier, Analyse des équations déterminées, Paris 1830, p. 190. Deutsch von A. Loewy, Ostwalds Klassikerausgabe Nr. 127, S. 182.

Die symmetrische Multiplikationsmethode muß jedem Leser empfohlen werden, auch weil sie noch bei der Bestimmung des Ranges eines Produktes zweier Zahlen und bei der sog. Fourierschen Divisionsmethode zur Verwendung kommen wird.

Bei einer längeren Multiplikation aber wird eine Probe angebracht sein. Die sog. Neunerprobe besteht darin, daß man die Ziffernsummen der Faktoren, also $q(a)$ und $q(b)$ miteinander multipliziert oder bloß die Reste dieser Ziffernsummen gegenüber 9 — wir sagen α und β — miteinander multipliziert; dann stimmt das Produkt $\alpha\beta$ mit dem Reste der Ziffernsumme des Produktes gegenüber dem Divisor 9 bis auf ein Vielfaches von 9 überein.

In dem letzten Beispiele ist

$$q(8749) = 28, \quad q(891) = 18, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \alpha\beta = 0,$$

und so groß soll auch der Rest der Ziffernsumme des Produktes, der Rest von

$$q(8749 \times 891) = q(7\,795\,359) = 45$$

bei der Division durch 9 sein. Das trifft hier zu, und im allgemeinen läßt das Produkt von

$$a = 9a' + q(a), \quad b = 9b' + q(b)$$

bei der Division durch 9 den Rest $q(ab)$ aber auch den Rest $q(a) . q(b)$ zu, womit die Behauptung erwiesen ist.

§ 4. Division und Rangbestimmung.

Nun wollen wir eine Zahl c aufsuchen, die mit einer anderen aber ganzen Zahl b multipliziert eine ganze Zahl a gibt, wollen also den sogenannten Quotienten von a und b bestimmen, der mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet werde, oder wollen, wie man noch sagt, a durch b dividieren, so daß a der Dividend, b der Divisor heißt. Wenn man von dem Bruche $\frac{a}{b}$ spricht, heißt a der Zähler und b der Nenner.

Zu diesem Zwecke vergleichen wir zunächst die $m + 1$ ersten Ziffern der Zahl a vom Range n, das sind die $m + 1$ Ziffern der größten Rangzahlen in a, nämlich

$$a_n, \quad a_{n-1}, \quad \ldots \; a_{n-m},$$

mit den $m+1$ Ziffern von b. Wenn bei dieser Gegenüberstellung der Ziffern, die auch mit Ordnungszahlen bezeichnet werden mögen, zuerst eine größere unter denen des Divisors vorkommt, so vereinigen wir die ersten $m+2$ Ziffern von a zu einer Zahl

$$\bar{a}_k = a_n a_{n-1} \dots a_{n-m} a_{n-m-1},$$

dann wird

$$a = \bar{a}_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_0,$$

wo $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots a_0$ die auf a_{n-m-1} folgenden Ziffern von a sind. Doch wenn bei der Gegenüberstellung der $m+1$ ersten Ziffern von a und der Ziffern von b unter denen von gleicher Ordnungszahl nicht zuerst eine größere unter denen von b vorkommt, so fasse man nur die $m+1$ ersten Ziffern von a zu einer Zahl

$$\bar{a}_k = a_n a_{n-1} \dots a_{n-m}$$

zusammen und setze somit

$$a = \bar{a}_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_0,$$

wo $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots a_0$ jetzt die auf a_{n-m} folgenden Ziffern von a sind; kurz man setze

$$a = \bar{a}_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$$

und fordere, daß

$$10\,b > \bar{a}_k \geqq b$$

sei. Beispielsweise setze man 583619 bei der Division durch 584 in die Gestalt

$$5836 . 10^2 + 1 . 10 + 9,$$

aber bei der Division durch 571 in die Gestalt:

$$583 . 10^3 + 6 . 10^2 + 1 . 10 + 9.$$

Man hat also $n = 5$, $m = 2$, das erstemal $k = 2$, das zweitemal $k = 3$.

Hierauf bilde man

$$\bar{a}_k - b . c_k = r_k, \quad \dots \dots \dots \quad (1$$

wo $r_k < b$ und c_k eine Ziffer sei; ferner

$$10\,r_k + a_{k-1} - b . c_{k-1} = r_{k-1}, \quad \dots \dots \quad (2$$

wo wieder $r_{k-1} < b$ und c_{k-1} eine Ziffer sei usw., endlich

$$10\,r_1 + a_0 - b . c_0 = r_0, \quad \dots \dots \quad (k+1$$

wo auch $r_0 < b$ und c_0 eine Ziffer sei.

Multipliziert man die hier aufgestellten $k + 1$ Gleichungen der Reihe nach mit

$$10^k,\quad 10^{k-1},\quad \ldots\ 10^0 = 1$$

und addiert sie, so erhält man

$$a - b\,(c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_0) = r_0,$$

und es wird

$$\frac{a}{b} = c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_0 + \frac{r_0}{b},$$

wo die Summe der $(k + 1)$-stelligen Zahl

$$c = c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0,$$

und $\frac{r_0}{b}$ der verlangte Quotient, aber r_0 der Rest der Division heißt.

Der Bestandteil c ist vom Range $n - m - 1$, wenn bei der Vergleichung der ersten $m + 1$ Ziffern von a und der von b zuerst eine größere Ziffer in b vorkommt, aber c ist vom Range $n - m$, wenn eine größere Ziffer zuerst unter denen von a vorkommt oder die durch gleiche Ordnungszahlen einander entsprechenden Ziffern alle übereinstimmen.

Bei der Bestimmung der Ziffern $c_k, c_{k-1}, \ldots c_0$ stellt man die Differenzen

$$(10 r_x + a_{x-1}) - b c_{x-1} \qquad (x = k, k - 1, \ldots 1)$$

im Kopfe her, hat also beispielsweise zur Division von 432 791 durch 51 zu bilden:

$$\begin{aligned} 432 - 51.8 &= 24, \\ 247 - 51.4 &= 43, \\ 439 - 51.8 &= 31, \\ 311 - 51.6 &= 5, \end{aligned}$$

so daß sich ergibt

$$432\,791 - 51.8486 = 5.$$

Man bringt aber die Rechnung stets in die Anordnung

```
432 791 : 51 = 8486
24 7
 4 39
   311
     5
```

sieht also zuerst nach, daß 51 achtmal als Bestandteil in 432 enthalten ist, schreibt

$$432 - 51.8 = 24$$

unter 432, die Einer unter die Einer und nimmt — wie man sagt — 7 herunter, bildet also 247; dann sieht man nach, daß 51 hierin viermal als Bestandteil enthalten ist, bildet

$$247 - 51.4 = 43,$$

dann

$$43.10 + 9 \text{ usw.}$$

Doch bei dieser hier beschriebenen „gewöhnlichen“ Divisionsmethode hat man den Nachteil, die Ziffern c_x mit dem ganzen Divisor multiplizieren zu müssen und die Unbequemlichkeiten, eine zu groß oder zu klein gewählte Ziffer c_x durch eine kleinere oder größere ersetzen zu müssen. Diese Umstände werden uns später noch veranlassen, eine andere Divisionsmethode herzustellen, bei der weniger Unbequemlichkeiten bestehen.

Jetzt setzen wir die Bildungsweise der früheren $k + 1$ Gleichungen in der Weise fort, daß wir herstellen:

$$r_0 10 - b.c_{-1} = r_{-1}, \text{ wo } c_{-1} \text{ eine Ziffer und } r_{-1} < b \text{ sei,}$$
$$r_{-1} 10 - b.c_{-2} = r_{-2}, \text{ wo } c_{-2} \text{ eine Ziffer, } r_{-2} < b \text{ sei usw.}$$
$$r_{-p+1} 10 - b\,c_{-p} = r_{-p}, \text{ wo } c_{-p} \text{ eine Ziffer, } r_{-p} < b \text{ sei,}$$

dann diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \ldots \frac{1}{10^p}$$

multiplizieren und alle addieren. Dabei wird

$$r_0 - b\left(\frac{c_{-1}}{10} + \frac{c_{-2}}{10^2} + \cdots + \frac{c_{-p}}{10^p}\right) = \frac{r_{-p}}{10^p}$$

und

$$\frac{r_0}{b} = \frac{c_{-1}}{10} + \frac{c_{-2}}{10^2} + \cdots + \frac{c_{-p}}{10^p} + \frac{r_{-p}}{b.10^p}.$$

Indem nun $\frac{r_{-p}}{b.10^p}$ bei wachsendem p kleiner wird als jede noch so kleine Größe, so haben wir in

$$\frac{c_{-1}}{10}, \frac{c_{-1}}{10} + \frac{c_{-2}}{10^2}, \frac{c_{-1}}{10} + \frac{c_{-2}}{10^2} + \frac{c_{-3}}{10^3}, \ldots$$

eine Größenreihe, deren Glieder die Eigenschaft gleich $\frac{r_0}{b}$ zu werden immer näher erfüllen. Es wird also

$$\frac{r_0}{b} = \lim_{p=\infty} \left(\frac{c_{-1}}{10} + \frac{c_{-2}}{10^2} + \cdots + \frac{c_{-p}}{10^p}\right)$$

und

$$\frac{a}{b} = c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_1 10 + c_0 + \frac{c_{-1}}{10} + \frac{c_{-2}}{10^2} + \cdots,$$

wobei unter der hier angedeuteten, auf c_0 folgenden unendlichen Reihe von Gliedern nur die Größe zu verstehen ist, die als Grenzwert der Reihe von „Partialsummen“ erscheint:

$$s_x = \frac{c_{-1}}{10} + \cdots + \frac{c_{-x}}{10^x} \quad (x = 1, 2, 3 \ldots).$$

In der Weise wird der Quotient ganzer Zahlen a und b, die wir bei der Quotientenbildung als teilerfremd, d. h. als Zahlen ohne einen gemeinsamen Teiler, voraussetzen können, durch einen Dezimalbruch dargestellt[1]). In diesem heiße das Glied $\frac{c_{-p}}{10^p}$ das vom Range „$-p$“.

Wenn b bloß aus Potenzen von 2 und 5 zusammengesetzt ist, so bricht der Dezimalbruch ab und heißt ein endlicher; das erkennt man, wenn die einmal als endlich vorausgesetzte Entwickelung von $\frac{a}{b}$ mit der letzten Zehnerpotenz 10^p multipliziert wird:

$$\frac{a}{b} 10^p = c\,10^p + c_{-1} 10^{p-1} + \cdots + c_{-p}.$$

Man schreibt diesen endlichen Dezimalbruch — und mit solchen werden wir es jetzt allein zu tun nehmen — in folgender Weise:

$$c \cdot c_{-1} c_{-2} \ldots c_{-p}.$$

Über die Addition und Subtraktion endlicher Dezimalbrüche, deren Rangzahlen nach denen der jeweiligen Glieder höchsten Ranges benannt werden, ist nicht mehr zu sagen, als daß die Glieder gleichen Ranges addiert, bzw. subtrahiert werden.

Zur Beurteilung des Ranges eines Quotienten zweier endlichen Dezimalbrüche, deren Rangzahlen n und m auch negativ sein können, führe ein Beispiel, aus dem wieder zu ersehen ist, daß der Quotient vom Range $n - m - 1$ oder $n - m$ wird, je nachdem bei der Gegenüberstellung der Ziffern von b und von a, und zwar stets von solchen ersten ab, die von null verschieden sind, zuerst eine größere in b vorkommt, oder aber das nicht der Fall ist.

---

[1]) Zur näheren Behandlung siehe Stolz, Allgemeine Arithmetik.

Soll $a = 0{\cdot}047\,957$ und $b = 5{\cdot}27$, das sind Zahlen von den Rangzahlen $n = -2$, $m = 0$, durcheinander dividiert werden und zwar a durch b, so wird der Rang des Quotienten

$$n - m - 1 = -3,$$

wie die Schreibweise des Quotienten zeigt:

$$\frac{a}{b} = \frac{47\,957}{10^6} : \frac{527}{10^2} = \frac{91}{10^4} = 0{\cdot}0091.$$

Ebenso ist der Rang von $28{\cdot}4924 : 0{\cdot}017\,48$, wo der vom Dividenden 1, der vom Divisor -2 ist, $n - m = 3$, denn man hat

$$\frac{a}{b} = \frac{284\,924}{10^4} : \frac{1748}{10^5} = 1630.$$

Hier wollen wir gelegentlich auch den Rang des Produktes ganzer Zahlen a und b von den Rangzahlen n bzw. m bestimmen[1]) und hierauf den Rang des Produktes von endlichen Dezimalbrüchen, welche Aufgaben, wie wir später sehen werden, auch bei Verwendung des Rechenschiebers von Wichtigkeit sein werden.

Bildet man $ab = c$, so wird der Rang von $\frac{c}{b}$ n, der von $\frac{c}{a}$ m. Damit das aber eintreten könne, muß c vom Range $n + m$ oder $n + m + 1$ sein, und zwar wird das Produkt vom Range $n + m + 1$, wenn bei der Gegenüberstellung der ersten $n + 1$ oder der ersten $m + 1$ Ziffern von c, die man nach der symmetrischen Multiplikationsmethode herstelle, und der Ziffern von a bzw. b eine größere zuerst in a bzw. in b vorkommt, und das Produkt wird vom Range $m + n$, wenn dieses Vorkommnis nicht besteht.

Ist $a = 849$, $b = 238$, so werden die drei Stellen höchsten Ranges in ab 2, 0, 1 und weil gleich die Stelle höchsten Ranges in a größer als 2 ist, so wird der Rang des Produktes ab $4 + 1 = 5$; um das zu erkennen, braucht man nur zu beachten, daß in dem Produkt 8 . 2 die Zahl der Zehner 1, aber die der Hunderter in a 8 ist und bei der Ausführung der symmetrischen Multiplikation der vorgegebenen Zahlen die Zahl der Zehner, nämlich 1, gewiß nicht um 7 vermehrt werden wird.

[1]) Biermann, Monatsh. f. Math. u. Physik, Jahrg. XV.

Ist aber $a = 381$, $b = 125$, so wird die Ziffer des höchsten Ranges in ab $3 + 1 = 4$, und weil die Ziffern der höchsten Rangzahlen in a und b kleiner als 4 sind, so hat das Produkt den Rang $2 + 2 = 4$, was wir bei Vergleich der Hunderter von b mit dem Produkte der Hunderter der Faktoren bereits ersehen.

Eine andere Fassung dieser Regel ist die folgende: Das Produkt zweier ganzen Zahlen a und b aus $p = n + 1$ und $q = m + 1$ Ziffern, wo $p \geqq q$ sei, ist dann eine $(p + q)$-stellige Zahl, wenn unter den Ziffern jedwedes Faktors zuerst eine vorkommt, die größer ist als die entsprechende in dem Produkte c und anderenfalls ist das Produkt $(p + q - 1)$-stellig.

Der Rang des Produktes der zwei Dezimalbrüche $a = 0{\cdot}475$ und $b = 1{\cdot}894$, wo $n = -1$, $m = 0$ ist, wird $m + n = -1$, weil die Ziffer höchsten Ranges in ab größer als 4 wird, und somit größer ist als jede der ersten von null verschiedenen Ziffern in a und b.

Man bemerkt das auch, indem man

$$ab = \frac{475 \times 1894}{10^6}$$

setzt und beachtet, daß der Zähler einer sechsstelligen Zahl gleichkommt [1]).

§ 5. Fouriersche Divisionsmethode.

Bei der gewöhnlichen Divisionsmethode wurde erreicht, daß der Quotient positiver ganzer Zahlen a und b nach fallenden Potenzen von 10 zu entwickeln war und daß, wie wir jetzt in etwas anderer, aber gewiß verständlicher Bezeichnung schreiben:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b}\,(\bar{a}\,10^k + a_1\,10^{k-1} + \cdots + a_k) = c =$$
$$= c_0\,10^{n-m} + c_1\,10^{n-m-1} + \cdots$$

hervorging, wobei die Koeffizienten c_ν wieder Ziffern sind. Unter bekannten Umständen ist $c_0 = 0$. Immer aber wurde zur Bestimmung des Quotienten jede Ziffer c_ν mit b multipliziert, denn die Gleichungen zur Ermittelung der c_ν lauteten:

---

[1]) Eine Divisionsprobe soll hier nicht behandelt werden, weil der Begriff der Periode eines Dezimalbruches nicht aufgenommen wurde. Eine Note darüber von dem Verfasser wird im 16. oder 17. Bande der Monatshefte für Mathematik und Physik erscheinen.

$$\begin{aligned} \bar{a} &= c_0 b + r_0, \\ 10 r_0 + a_1 &= c_1 b + r_1, \\ 10 r_1 + a_2 &= c_2 b + r_2, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

und nach Multiplikation dieser Gleichungen mit den von der k^{ten} Potenz ab fallenden Zehnerpotenzen gab die Addition

$$a = cb.$$

Setzt man jetzt aber b und a in die Formen

$$\begin{aligned} b &= \bar{b}\, 10^{m-\mu} + b_1\, 10^{m-\mu-1} + \cdots, \\ a &= \bar{a}\, 10^{n-\mu} + a_1\, 10^{n-\mu-1} + \cdots, \end{aligned}$$

wo $\bar{b}$ eine aus den $\mu + 1$ ersten Ziffern von b gebildete Zahl und wo

$$\bar{b} \leqq \bar{a} < 10\bar{b}$$

sein soll, aber die anderen a_ν und b_ν Ziffern seien, so kann man eine Gleichung

$$\frac{a}{b} = c_0\, 10^{n-m} + c_1\, 10^{n-m-1} + \cdots, \tag{A}$$

in der auch die c_ν Ziffern seien, solcherart herzustellen versuchen, daß das hier nach der symmetrischen Multiplikationsmethode zu bildende Produkt von b und diesem Quotienten, d. i.

$$\begin{aligned} & c_0 \bar{b} \,.\, 10^{n-\mu} + (c_0 b_1 + c_1 \bar{b})\, 10^{n-\mu-1} + \cdots \\ & + (c_0 b_\nu + c_1 b_{\nu-1} + \cdots + c_\nu \bar{b})\, 10^{n-\mu-\nu} + \cdots \end{aligned}$$

eben wieder gleich a werde.

Zur Befriedigung dieser Forderung hat man entsprechend wie früher zu verlangen, daß die Gleichungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= c_0 \bar{b} + r_0, \\ 10 r_0 + a_1 &= c_0 b_1 + c_1 \bar{b} + r_1, \\ 10 r_1 + a_2 &= c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 \bar{b} + r_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ 10 r_{\nu-1} + a_\nu &= c_0 b_\nu + c_1 b_{\nu-1} + \cdots + c_{\nu-1} b_1 + c_\nu \bar{b} + r_\nu, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

wobei die r_ν positive ganze Zahlen kleiner oder gleich $\bar{b} - 1$ sein sollen und wo neben dem bei positiven a und b auch positiven c_0 jedes der $c_\varkappa$ als positive ganze Zahl oder gleich null auftritt, wenn nur die vorhergehenden $c_{\varkappa-1}, c_{\varkappa-2}, \ldots c_0$ genügend klein gewählt werden.

Multipliziert man nämlich die ersten $\nu + 1$ der angeschriebenen Gleichungen der Reihe nach mit

$$10^{n-\mu},\quad 10^{n-\mu-1},\quad \ldots\ 10^{n-\mu-\nu}$$

und addiert dann alle, so entsteht jetzt

$$a = c_0\bar{b}.10^{n-\mu} + (c_0 b_1 + c_1 \bar{b})\,10^{n-\mu-1} + \cdots$$
$$+ (c_0 b_\nu + c_1 b_{\nu-1} + \cdots + c_\nu \bar{b})\,10^{n-\mu-\nu} + r_\nu\,10^{n-\mu-\nu};$$

und darum, weil im Falle jedes $r_\nu \leqq \bar{b} - 1$

$$\lim_{\nu=\infty} r_\nu.10^{n-\mu-\nu} = 0$$

gilt, so wird bei der Fortsetzung der früheren Gleichungen die verlangte Relation (A hervorgehen, doch hat sie nur dann einen Wert, eine arithmetische Bedeutung, wenn die unendliche Reihe

$$c_0\,10^{n-m} + c_1\,10^{n-m-1} + \cdots$$

oder wenn die nach Division durch 10^{n-m} hervorgehende Reihe

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots$$

aus bloß positiven Gliedern konvergiert, d. h. die Reihe der Partialsummen eine bestimmte endliche Grenze besitzt. Dann haben wir in dieser Reihe einen durch Umkehrung der symmetrischen Multiplikationsmethode gebildeten Quotienten, und die Methode, ihn zu berechnen, weist den erwünschten Vorteil auf, daß man zur Herstellung der Ziffern c_ν nicht die Multiplikation mit b, sondern nur die mit $\bar{b}$ zu vollziehen hat. Diese Methode rührt von Fourier[1]) her.

Es ist nun die Bedingung für die Konvergenz der genannten unendlichen Reihe zu finden.

Weil

$$c_\nu = \frac{1}{\bar{b}}\,[10\,r_{\nu-1} + a_\nu - (c_0 b_\nu + c_1 b_{\nu-1} + \cdots + c_{\nu-1} b_1) - r_\nu]$$

ist (s. S. 19), aber die Ziffern a_ν und $b_\nu, b_{\nu-1}, \ldots b_1$ höchstens 9, $r_{\nu-1}$ und r_ν höchstens $\bar{b} - 1$ sind, so besteht die Ungleichung

$$c_\nu < \frac{1}{\bar{b}}\,[10(\bar{b} - 1) + 9 + 9\,(c_0 + c_1 + \cdots + c_{\nu-1}) + (\bar{b} - 1)],$$

also auch

$$c_\nu < \frac{11\,\bar{b} - 2}{\bar{b}} + \frac{9}{\bar{b}}\,(c_0 + c_1 + \cdots + c_{\nu-1}).$$

---

[1]) Fourier, „Analyse des équations determinées". Paris 1831, p. 188 (s. Loewy, l. c., p. 180).

Doch jetzt gilt, wenn man

$$\frac{11\,\overline{b} - 2}{\overline{b}} = \alpha, \quad \frac{9}{\overline{b}} = \beta$$

setzt,

$$\begin{aligned}
c_1 &< \alpha + \beta c_0, \\
c_2 &< \alpha + \beta c_0 + \beta c_1 < (\alpha + \beta c_0)(1 + \beta), \\
c_3 &< \alpha + \beta c_0 + \beta c_1 + \beta c_2 < (\alpha + \beta c_0)(1 + \beta)^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_\nu &< (\alpha + \beta c_0)(1 + \beta)^{\nu - 1},
\end{aligned}$$

und es ist offenbar, daß unsere Reihe konvergiert, sobald das von der Reihe gilt

$$c_0 + \frac{\alpha + \beta c_0}{1 + \beta}\left[\frac{1 + \beta}{10} + \left(\frac{1 + \beta}{10}\right)^2 + \cdots\right].$$

Weil nun aber hier in der Klammer die bekannte geometrische Reihe für

$$\frac{1 + \beta}{10} \, \frac{1}{1 - \dfrac{1 + \beta}{10}}$$

vorkommt, so besteht die Konvergenz, wenn nur

$$\frac{1 + \beta}{10} < 1 \quad \text{also} \quad \overline{b} > 1$$

ist.

Die neue Divisionsmethode werden wir also vollziehen, indem wir $\overline{b} > 1$ wählen und dann die in den früheren Gleichungen vorgeschriebenen Operationen zur Ermittelung der Ziffern c_ν ausführen. Nur achte man darauf, daß $c_{\nu-1}, c_{\nu-2}, \ldots c_0$ nicht zu groß gewählt werden, damit c_ν nicht negativ ausfalle. Das ist immer zu erreichen und ohne eine nachträgliche Verkleinerung von $c_{\nu-1}$, $c_{\nu-2}, \ldots c_0$ dann leichter, wenn $\overline{b}$ dreistellig, als wenn es nur zweistellig ist.

Wir bezeichnen noch

$$c_0 b_\nu + c_1 b_{\nu-1} + \cdots + c_{\nu-1} b_1 = \mathfrak{C}_\nu$$

als die νte Korrektion und führen das folgende Beispiel aus:

Es sei der Quotient von 1 und 2·302 585 092 6 zu bestimmen. Wir überlegen, daß der Rang desselben -1 wird, setzen $\overline{a} = 1000$, alle weiteren $a_\nu = 0$, trennen $\overline{b} = 230$ ab, setzen also $b_1 = 2$, $b_2 = 5$ usw. und bilden:

$$
\begin{array}{l}
1000 : 230 \mid 25\,850\,926 = 4\,342\,944 \ldots \\
\quad 800 = r_0 . 10 + a_1 \\
\quad\quad 8 = \mathfrak{S}_1 \\
\hline
\quad 792 \\
\quad 1020 = r_1 . 10 + a_2 \\
\quad\quad 26 = \mathfrak{S}_2 \\
\hline
\quad 994 \\
\quad\quad 740 = r_2 . 10 + a_3 \\
\quad\quad\quad 55 = \mathfrak{S}_3 \\
\hline
\quad\quad 685 \\
\quad\quad 2250 = r_3 . 10 + a_4 \\
\quad\quad\quad 68 = \mathfrak{S}_4 \\
\hline
\quad\quad 2182 \\
\quad\quad\quad 1120 = r_4 . 10 + a_5 \\
\quad\quad\quad\quad 75 = \mathfrak{S}_5 \\
\hline
\quad\quad\quad 1045 \\
\quad\quad\quad 1250 = r_5 . 10 + a_6 \\
\quad\quad\quad\quad 135 = \mathfrak{S}_6 \\
\hline
\quad\quad\quad 1125 \\
\quad\quad\quad\quad 2050 = r_6 . 10 + a_7 \\
\quad\quad\quad\quad\quad 145 = \mathfrak{S}_7 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 1905 \quad \text{usw.}
\end{array}
$$

Wir sehen nun, daß der Quotient

$$0{\cdot}434\,294\,4 \cdots$$

ist.

Die Bestimmung des Restes, wenn man das Verfahren abbricht, ist so umständlich, daß wir davon absehen, und das kann um so leichter geschehen, als das Verfahren sehr einfach so weit fortzusetzen ist, daß der Fehler nur einen sehr kleinen Bruchteil der Einheit beträgt.

§ 6. Das Rechnen mit ungenauen Zahlen[1]).

Schon in der Einleitung wurde gezeigt, daß die Operation des Wurzelausziehens auf unendliche Dezimalbrüche führen könne.

---

[1]) Vgl. Lüroth, l. c. und J. Griess, Approximations numériques, Paris 1898.

Ebenso ergaben sich solche Brüche bei der Darstellung eines Bruches $\frac{a}{b}$ durch einen Dezimalbruch, wenn b nicht bloß aus den Faktoren 2 und 5 zusammengesetzt war. Die unendlichen Dezimalbrüche aber kann man nur näherungsweise oder, wie man sagt, „mit begrenzter Annäherung"[1]) in die Rechnung eintreten lassen. Ist a eine durch einen unendlichen Dezimalbruch dargestellte Zahl, a' eine rationale Zahl, deren Wert nahezu mit dem von a übereinkommt, so daß der Unterschied gegenüber a dem Betrage nach kleiner ist als eine beliebig kleine Größe δ, so wird dieser rationale Näherungswert a entweder nicht erreichen oder aber übertreffen, d. h. a' ist entweder mit einem negativen oder positiven Fehler $\mp \Delta a$ behaftet. Das soll heißen, a' sei um Δa kleiner oder um Δa größer als a; doch jedesmal ist

$$| a - a' | = \Delta a.$$

Der Betrag des Unterschiedes zwischen der genauen und ungenauen Zahl a und a' heißt der absolute Fehler von a'.

Bei Beobachtungen wird der Sinn des Fehlers oftmals nicht festzustellen sein, er wird also positiv oder negativ sein können; aber bei rechnerischen Größen wird der Fehler zumeist positiv, so z. B. ist

$$\sqrt{2} - 1{\cdot}414 > 0.$$

Bricht man den Dezimalbruch für a

$$a = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots$$

nach der Stelle vom Range $-n$ ab, so besitzt man in dem Bruche mit n Dezimalstellen einen solchen Näherungswert a' kleiner als a, daß sein absoluter Fehler Δa kleiner als $\frac{1}{10^n}$ ist, denn es ist

$$a - a' = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots \leqq \frac{9}{10^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^n}.$$

Dann ist

$$a'' = a' + \frac{1}{10^n}$$

ein a übertreffender Näherungswert solcher Art, daß in

---

[1]) Klein-Sommerfeld, Theorie des Kreisels, 1898, S. 269.

$$a'' = a + \Delta a$$

Δa wiederum kleiner als $\frac{1}{10^n}$ ist. Hierzu bedarf es gewiß kaum der Bemerkung, daß aber der absolute Fehler von a'' ein anderer als der von a' sein wird.

Es gilt, wenn $a' = 1{\cdot}4142$ als Näherungswert von $\sqrt{2}$ angesprochen wird:

$$\Delta a < \frac{1}{10^4},$$

und $a'' = 1{\cdot}4143$ übertrifft $\sqrt{2}$ um weniger als $\frac{1}{10^4}$.

So haben wir also in a' und a'' zwei um $\frac{1}{10^n}$ voneinander abweichende Zahlen, die beide Näherungswerte von a sind und a in seinen ersten $(n - 1)$ Dezimalstellen genau angeben. Doch man gebraucht die Redeweise, ein Näherungswert

$$a' = a \mp \Delta a$$

gebe a auf n Stellen genau, sobald $\Delta a < \frac{1}{10^n}$ ist, wenngleich man doch nur $(n - 1)$ Stellen oder sogar nur $(n - 2)$ Stellen genau weiß. In der Tat, wenn in a' die Ziffer vom Range $- n$ null oder neun heißt, z. B. wenn $a' = 7{\cdot}450$ ist, so gilt

$$a' - \frac{1}{10^n} = 7{\cdot}449 < a < 7{\cdot}451 = a' + \frac{1}{10^n}$$

und es sind nur $(n - 2)$ Stellen, in dem besonderen Beispiele ist nur eine Dezimalstelle sicher; aber doch sagt man, daß a' und a'' die Zahl a beide auf n (auf 3) Dezimalstellen genau angeben.

Die Abkürzung eines Dezimalbruches erfolgt noch in der Weise, daß man den Dezimalbruch nach der Stelle vom Range $- n$ abbricht und die $n$te Dezimalstelle unverändert läßt, wenn die auf sie folgende kleiner als 5 ist, sie aber um eins erhöht, wenn die auf sie folgende gleich oder größer als 5 ist.

So erfährt z. B. $\sqrt{6} = 2{\cdot}449\ldots$ die Abkürzungen 2·4 und 2·45.

Der Fehler, den ein so abgekürzter Dezimalbruch besitzt, ist im ersten Falle nicht allein kleiner als $\frac{1}{10^n}$, sondern es gilt:

$$a - a' < \frac{1}{2}\,\frac{1}{10^n}.$$

Im zweiten Falle, wenn also beim Abbrechen des Dezimalbruches nach der Stelle vom Range $-n$ diese um eins erhöht wird, sobald nämlich die Stelle vom Range $-(n+1)$ größer oder gleich 5 ist, wird aus dem Näherungswerte a', wo jetzt

$$a - a' \geqq \frac{1}{2}\frac{1}{10^n}$$

ist, in $a' + \frac{1}{10^n}$ ein neuer Näherungswert a'' geschaffen. Doch hier ist wieder

$$| a - a'' | < \frac{1}{2}\frac{1}{10^n}.$$

Bezeichnen wir auch diesen Näherungswert wieder mit a', so kann $a - a'$ sowohl vom positiven, als auch vom negativen Zeichen sein, aber dann bedarf man einer besonderen Bezeichnung, ob a' zu klein oder zu groß ist. Man findet nun oft in Tafelwerken durch die letzte Ziffer des abgekürzten Dezimalbruches oder über dieser im zweiten Falle einen horizontalen Strich gezogen.

So sagt 3·14 als Näherungswert, daß der wahre Wert zwischen 3·14 und 3·145 liege; aber $3{\cdot}1\overline{5}$ sagt als Näherungswert, daß der wahre Wert zwischen 3·145 und 3·15 liege, wobei nur die untere Grenze als ein möglicher Wert mit einzuschließen ist. —

Die Rechnungen mit ungenauen Zahlen $a_1', a_2', \ldots a_n'$ anstatt mit den genauen $a_1, a_2, \ldots a_n$ werden oft selbst nur näherungsweise vollzogen, d. h. bei Ausführung einer oder mehrerer Operationen mit den ungenauen Zahlen, sagen wir bei Bildung der in einem Symbol $f(a_1', a_2', \ldots a_n')$ enthaltenen Operationen, wird man nur näherungsweise rechnen, weil auch schon durch die Näherungswerte eine Ungenauigkeit aufgenommen ist. Der Fehler, der somit dem Werte für $f(a_1', a_2', \ldots a_n')$ anhaften wird, setzt sich also aus zweien zusammen, aus dem, der durch die Wahl der Näherungswerte hervorgerufen ist, und aus dem, der durch die ungenaue Rechnung mit den Näherungswerten eingeführt ist.

Es sei erstens

$$| f(a_1, a_2, \ldots a_n) - f(a_1', a_2', \ldots a_n') | = \Delta f(a_1, a_2, \ldots a_n)$$

und zweitens, wenn man einen mit $a_1', a_2', \ldots a_n'$ tatsächlich berechneten Wert mit N bezeichnet,

$$| f(a_1', a_2', \ldots a_n') - N | = \delta f(a_1', a_2', \ldots a_n').$$

Und da sieht man, daß

$$| f(a_1, a_2, \dots a_n) - N | \leqq \varDelta f(a_1, \dots a_n) + \delta f(a'_1, \dots a'_n)$$

wird, d. h. der N anhaftende Fehler ist additiv aus $\varDelta$ und δ zusammengesetzt.

Man stellt nun die Aufgabe, die Berechnung von $f(a'_1, a'_2, \dots a'_n)$ so einzurichten, daß der Fehler von N dem Betrage nach kleiner werde als eine vorgegebene positive Größe ε, also daß

$$| \varDelta + \delta | = \varDelta + \delta < \varepsilon$$

werde. Doch diese Ungleichung ist natürlich in sehr verschiedener Weise zu erfüllen, und da entspricht es nun dem Gebrauche, den Betrag δ kleiner als $\frac{\varDelta}{10}$ zu bestimmen, worauf dann

$$11 \frac{\varDelta}{10} < \varepsilon$$

zu machen ist.

So wird man etwa in dem Falle der in der Einleitung genannten Aufgabe, nämlich bei der Bestimmung des Präzisionsmaßes

$$\frac{11}{10} \varDelta \sqrt{\frac{n-1}{2[\lambda\lambda]}} < \varepsilon$$

setzen. —

Jetzt soll man den absoluten Fehler von $f(a'_1, a'_2, \dots a'_n)$ angeben, wenn man $f(a_1, a_2, \dots a_n)$ anstatt mit den wahren Werten mit Näherungswerten berechnet, denen die bekannten absoluten Fehler $\varDelta a_1, \varDelta a_2, \dots \varDelta a_n$ anhaften.

Beachtet man, daß man die Werte $a_1, a_2, \dots a_n$ aus den Werten $a'_1, a'_2, \dots a'_n$ entstanden denken kann, indem man diesen die kleinen positiven oder negativen Zuwächse $d a_1, d a_2, \dots d a_n$ erteilt, so sind nach den Grundbegriffen der Differentialrechnung die Größen

$$f(a_1, \dots a_n) - f(a'_1, \dots a'_n)$$

und

$$\left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\right)_{(a'_\nu)} d a_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial a_2}\right)_{(a'_\nu)} d a_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial a_n}\right)_{(a'_\nu)} d a_n$$

nahezu gleich, wo durch die den partiellen Ableitungen beigesetzten Zeichen (a'_ν) angezeigt sein soll, daß die Werte der Ableitungen für das Wertesystem $a'_1, a'_2, \dots a'_n$ zu nehmen sind; aus dieser Tatsache folgert man, daß das Differential von f

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\right)_{(a'_\nu)} d a_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial a_n}\right)_{(a'_\nu)} d a_n$$

ist.

Danach aber kann man insbesondere sagen:

1. Der absolute Fehler einer Summe $a + b$ ist gleich der Summe der absoluten Fehler der Summanden:

$$\varDelta(a + b) = \varDelta a + \varDelta b;$$

denn es sind

$$\varDelta(a + b) = | a + b - (a' + b') |$$

und $| d a + d b |$ nahezu gleich und

$$d(a + b) = d a + d b.$$

2. Von dem absoluten Fehler der Differenz $a - b$ aber sagen wir wegen der Formel

$$d(a - b) = d a - d b$$

nur aus, daß der absolute Fehler der Differenz kleiner, höchstens gleich sei der Summe der absoluten Fehler von Minuend und Subtrahend:

$$\varDelta(a - b) \leqq \varDelta a + \varDelta b.$$

3. Der absolute Fehler des Produktes zweier Zahlen a und b, denen die Näherungswerte a' und b' zukommen, ist

$$\varDelta a b = b' \varDelta a + a' \varDelta b,$$

denn es gilt

$$d a b = b d a + a d b.$$

4. Eine obere Grenze für den Fehler des Quotienten $\frac{a}{b}$ wird durch den Ausdruck angegeben:

$$\frac{b' \varDelta a + a' \varDelta b}{b'^2},$$

und nur eine solche kann man daran knüpfen, daß die Differenz der Ausdrücke

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} \quad \text{und} \quad \frac{b' d a - a' d b}{b'^2}$$

sehr klein ist.

5. Der absolute Fehler einer Potenz a^k ist

$$k a'^{k-1} \varDelta a,$$

also der von $\sqrt{a}$ und $\sqrt[3]{a}$ ist beziehungsweise

$$\frac{\Delta a}{2\sqrt{a'}} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a'^2}}$$

usw., wobei nur bekannte Formeln der Differentialrechnung zur Anwendung zu bringen sind.

Eine erste Anwendung dieser Formeln besteht in der Erledigung der Frage: Mit welcher Annäherung kann man einen Ausdruck $f(a_1, a_2, \ldots a_n)$ bestimmen, wenn man bei der Berechnung statt der wahren Werte $a_1, a_2, \ldots a_n$, Näherungswerte $a'_1, a'_2, \ldots a'_n$ benützt, deren absolute Fehler $\Delta a_1, \Delta a_2, \ldots \Delta a_n$ bzw. kleiner sind als die positiven Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$.

Bildet man nämlich

$$\left|\left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\right)_{(a'_\nu)}\right| \varepsilon_1 + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial a_2}\right)_{(a'_\nu)}\right| \varepsilon_2 + \cdots + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial a_n}\right)_{(a'_\nu)}\right| \varepsilon_n,$$

so wird durch diese Summe positiver Größen eine Größe M gesetzt, die nicht kleiner als Δf ist, d. h. man hat

$$\Delta f \leqq M.$$

Damit besitzt man also eine Größe M, bis auf die der Ausdruck $f(a_1, a_2, \ldots a_n)$ bei Benützung der Näherungswerte von der genannten Art zu berechnen ist.

Fragt man z. B. wie weit genau, mit welcher Annäherung der Flächeninhalt eines Rechteckes berechnet werden kann, wenn die Seiten a und b bis auf ein zehntel Meter genau gegeben sind und etwa

$$a' = 57{\cdot}3\,\text{m}, \quad b' = 42{\cdot}7\,\text{m}, \quad \Delta a = \Delta b \leqq 0{\cdot}1\,\text{m}$$

gilt, so folgt

$$\Delta ab = 57{\cdot}3\,\Delta b + 42{\cdot}7\,\Delta a \leqq (57{\cdot}3 + 42{\cdot}7)\,0{\cdot}1 = 10,$$

d. h. man kann $f(a, b) = ab$ unter den genannten Bedingungen nur bis auf 10 Flächeneinheiten genau bestimmen und wird daher den Flächeninhalt ab nur bis auf die Zehner genau rechnen, wobei man findet 2440 m².

Wird ebenso die Breite eines Rechteckes verlangt, dessen Flächeninhalt bis auf 10 m² genau 2436 m² ist und dessen Länge bis auf $\frac{1}{10}$ m genau 57·3 m ist, so daß

$$a' = 2436, \quad \Delta a = 10, \quad b' = 57{\cdot}3, \quad \Delta b = 0{\cdot}1$$

gilt, so wird zufolge der Formel

$$\varDelta \frac{a}{b} \leqq \frac{1}{b'^2} (a' \varDelta b + b' \varDelta a)$$

eine obere Grenze des absoluten Fehlers von $\frac{a}{b}$

$$\frac{1}{57 \cdot 3^2} \left(2436 \cdot \frac{1}{10} + 57 \cdot 3 . 10\right) < 0 \cdot 25,$$

d. h. man wird die Breite durch den Quotienten $\frac{2436}{57 \cdot 3}$ nur auf ein viertel Meter genau bestimmen.

Die umgekehrte Aufgabe der letzten allgemeinen ist es, einen Ausdruck $f(a_1, a_2, \ldots a_n)$ dadurch bis auf eine im vorhinein gegebene Größe ε zu berechnen, daß man die Näherungswerte $a_1', a_2', \ldots a_n'$ und ihre absoluten Fehler $\varDelta a_1, \varDelta a_2, \ldots \varDelta a_n$ entsprechend der Ungleichung bestimmt $\varDelta f < \varepsilon$.

$\varDelta f$ setzt sich, wie man auch hier beachte[1]), aus den absoluten Fehlern

$$| f(a_1, a_2, \ldots a_n) - f(a_1', a_2', \ldots a_n') |$$

und

$$| f(a_1', \ldots a_n') - N |$$

zusammen. Wenn man daher bei der tatsächlichen Rechnung mit den Näherungswerten $a_1', a_2', \ldots a_n'$ so rechnet, daß man alle Stellen von geringerem Range als dem $-n$ten unterdrückt und so abkürzt, daß der absolute Fehler kleiner als $\frac{1}{2} \frac{1}{10^n}$ wird, so muß, wenn $\varDelta f < \frac{k}{10^n}$, d. h. die Rechnung bis auf k Einheiten der $n$ten Dezimalstelle genau werden soll, der absolute Fehler von $f(a_1', a_2', \ldots a_n')$ kleiner als $\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{10^n}$ werden.

Man wird also solche Näherungswerte $a_1', a_2', \ldots a_n'$ einführen, daß

$$\left| \left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\right)_{(a_\nu')} \right| \varDelta a_1 + \cdots + \left| \left(\frac{\partial f}{\partial a_n}\right)_{(a_\nu')} \right| \varDelta a_n < \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{10^n}$$

wird, welche Aufgabe unbestimmt ist, und wird mit den Näherungswerten so rechnen, daß der absolute Fehler kleiner als $\frac{1}{2} \frac{1}{10^n}$ wird; denn dabei wird der Fehler für den vorgelegten Ausdruck kleiner als $\frac{k}{10^n}$.

---

[1]) Zugleich mit Benze.

Beispiele sollen die Vorschrift erläutern.

Soll man $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$ bis auf $\frac{1}{10^5}$ genau bestimmen, so wird das erreicht, wenn man die vier Wurzeln durch solche Näherungswerte ersetzt, daß die Summe der Fehler kleiner als $\frac{1}{10^5} - \frac{5}{10^6} = \frac{5}{10^6}$ ist. Aber dem wird genügt, wenn man z. B. die vier einzelnen Wurzeln bis auf $\frac{1}{10^6}$ berechnet.

Danach wird der absolute Fehler in der Summe von

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= 1{\cdot}732\,050 \\ \sqrt{4} &= 2 \\ \sqrt{5} &= 2{\cdot}236\,067 \\ \sqrt{6} &= 2{\cdot}449\,489 \\ \hline & \quad 8{\cdot}417\,606 \end{aligned}$$

kleiner als $\frac{5}{10^6}$ und der von $8{\cdot}417\,6\bar{1}$ kleiner als $\frac{1}{10^5}$.

Will man wissen, wie genau man in $\sqrt{3} - \sqrt[3]{5}$ Subtrahend und Minuend braucht, damit der absolute Fehler der Differenz kleiner als $\frac{1}{10^3}$ werde, so hat man

$$\Delta\sqrt{3} + \Delta\sqrt[3]{5} < \frac{5}{10^4}$$

zu machen. Das wird erreicht, indem man

$$\Delta\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \Delta\sqrt[3]{5} < \frac{1}{2}\,\frac{5}{10^4}$$

oder gar, indem man Subtrahend und Minuend auf $\frac{1}{10^4}$ genau bestimmt:

$$\sqrt{3} = 1{\cdot}7320, \qquad \sqrt[3]{5} = 1{\cdot}7099;$$

dann hat

$$\sqrt{3} - \sqrt[3]{5} = 0{\cdot}0221$$

einen absoluten Fehler kleiner als $\frac{5}{10^4}$ und $0{\cdot}022$ einen absoluten Fehler kleiner als $\frac{1}{10^3}$.

Man könnte nach der letzten Vorschrift auch das Produkt zweier endlichen Dezimalbrüche behandeln; doch geht man besser folgendermaßen vor:

Um gleich die Multiplikation zweier unendlichen Dezimalbrüche a und b vorzubereiten, setzen wir

$$a = a' + \Delta a, \qquad b = b' + \Delta b,$$

wo

$$\Delta a < 10^{n-\lambda}, \qquad \Delta b < 10^{m-\lambda}$$

sei, bilden aber hier das Produkt der endlichen Dezimalbrüche

$$a' = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_{n-\lambda} 10^{n-\lambda},$$
$$b' = b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + b_{m-\lambda} 10^{m-\lambda}.$$

Wir ersetzen $a' b'$ näherungsweise durch

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\lambda} 10^{m+n-\varkappa} (a_n b_{m-\varkappa} + a_{n-1} b_{m-\varkappa+1} + \cdots + a_{n-\varkappa} b_m)$$

und lassen die übrigen Glieder des Produktes $a' b'$, nämlich

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\lambda} 10^{m+n-\lambda-\nu} (a_{n-\nu} b_{m-\lambda} + \cdots + a_{n-\lambda} b_{m-\nu})$$

fort. Der so zu vernachlässigende Teil ist darum, weil die b Ziffern sind,

$$\leqq 9 \sum_{\nu=1}^{\nu=\lambda} 10^{m+n-\lambda-\nu} (a_{n-\nu} + a_{n-\nu-1} + \cdots + a_{n-\lambda}).$$

Wenn $q(a')$ die Ziffernsumme von a' bezeichnet, wird also der Fehler

$$\leqq 9\, q(a')\, 10^{m+n-\lambda-1} \left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{\lambda-1}}\right),$$

aber auch

$$< 9\, q(a')\, 10^{m+n-\lambda-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = q(a')\, 10^{m+n-\lambda}.$$

Ebenso ist der Fehler bei Vernachlässigung der früheren Summe kleiner als $q(b')\, 10^{m+n-\lambda}$, wenn $q(b')$ die Ziffernsumme von b' ist. Will man danach das Produkt der beiden Faktoren a' und b', wo $q(a') \geqq q(b')$ sei, bis auf einen Fehler kleiner als ε bestimmen, so suche man nur die ganze Zahl λ, für die

$$q(a')\, 10^{m+n-\lambda} < \varepsilon$$

wird, vollführe die Multiplikation von a' und b' so, daß man erst in a' von der Stelle höchsten Ranges ab λ Stellen nach rechts weitergeht, ebenso in b', das man etwa derart unter a' anschreibe, daß die Stellen gleichen Ranges unter einander stehen,

und hierauf nach der symmetrischen Multiplikationsmethode bis zu Gliedern vom Range $m + n - \lambda$ multipliziert.

Soll z. B. das Produkt von $6{\cdot}324\,55 = a'$ und $9{\cdot}486\,83 = b'$ soweit bestimmt werden, daß der Fehler kleiner als $\frac{1}{10^8}$ wird, so hat man

$$q(b').10^{-\lambda} = 38.10^{-\lambda} < 10^{-8}$$

oder

$$38\,000 < 10^{\lambda}$$

zu machen, und weil das für $\lambda = 5$ eintritt, so bilde man

$$\begin{array}{r}
6{\cdot}324\,55 \\
9{\cdot}486\,83 \\
\hline
4\,184\,31 \\
55\,704\,5 \\
111 \\
\hline
59{\cdot}999\,81.
\end{array}$$

Zu einer anderen Ausführung der abgekürzten Multiplikation der endlichen Dezimalbrüche a' und b' ordnet man gewöhnlich die Glieder der Summe

$$\sum_{x=0}^{x=\lambda} 10^{m+n-x}\,(a_n b_{m-x} + \cdots + a_{n-x} b_m)$$

in folgender Weise:

$$\begin{aligned}
(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_{n-\lambda} 10^{n-\lambda})\, b_m 10^m &+ \\
+ (a_n 10^n + \cdots + a_{n-\lambda+1} 10^{n-\lambda+1})\, b_{m-1} 10^{m-1} &+ \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ a_n 10^n b_{m-\lambda} 10^{m-\lambda}
\end{aligned}$$

oder bei anderer Schreibweise so:

$$\begin{aligned}
(a_n a_{n-1} \ldots a_{n-\lambda})\, b_m 10^{m+n-\lambda} &+ \\
+ (a_n \ldots a_{n-\lambda+1})\, b_{m-1} 10^{m+n-\lambda} &+ \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ a_n b_{m-\lambda} 10^{m+n-\lambda}.
\end{aligned}$$

Dieses Aggregat hält man dadurch fest, daß man für die Multiplikation zweier endlichen Dezimalbrüche, die bis auf eine die ganze Zahl λ bestimmende Größe ε genau werden soll, folgende Regel gibt: Man schreibe unter den Multiplikanden die Ziffern des Multiplikators in verkehrter Anordnung und zwar setze man b_m unter die Stelle vom Range $n - \lambda$ und multipliziere hierauf **mit**

den nach links hin aufeinander folgenden Ziffern von b nur immer die Teile des Multiplikands die über ihnen und links über ihnen angeschrieben sind, schreibe dabei die Ziffern niedrigsten Ranges unter die Stelle des Multiplikands vom Range $n - \lambda$ und addiere schließlich die untereinander stehenden Teilprodukte. Dabei erhält die Ziffer ganz rechts den Rang $m + n - \lambda$.

Ist z. B. 794·5246 bis auf $\frac{1}{10}$ genau mit 231·6473 zu multiplizieren, so beachte man, daß die Ungleichung

$$37 \times 10^{4-\lambda} < 10^{-1}$$

durch $\lambda = 7$ befriedigt wird und man danach auszuführen hat:

$$\begin{array}{r} 794{\cdot}524\,60 \\ 3\,746\,132 \\ \hline 158\,904\,920 \\ 23\,835\,738 \\ 794\,524 \\ 476\,712 \\ 31\,780 \\ 5\,558 \\ 237 \\ \hline 184\,049{\cdot}469. \end{array}$$

Hier verdient noch besonders angeführt zu werden, daß man nach der Bestimmung des Ranges des Produktes $a'b'$ die Lage des Dezimalpunktes von links ab zählend festsetzen und die Multiplikation derart abgekürzt einrichten kann, daß die Stelle von der gewünschten Genauigkeit bei vollständiger Verwendung der symmetrischen Multiplikationsmethode nicht berührt wird.

In dem früheren Beispiele wird der Rang 5, darum bilde man

$$\begin{array}{r} 794{\cdot}524\,6 \\ 231{\cdot}647\,3 \\ \hline 492\,35\,869 \\ 1347\,02\,50 \\ 1\,11\,1 \\ \hline 184\,049{\cdot}469 \end{array}$$

und man sieht, daß weitere Glieder die Stelle vom Range -1 im Produkte nicht beeinflussen.

Jetzt erst gehen wir zu der abgekürzten Multiplikation der unendlichen Dezimalbrüche

$$a = a' + \varDelta a \quad \text{und} \quad b = b' + \varDelta b\,[1]).$$

Es wird

$$ab - \sum_{x=0}^{x=\lambda} 10^{m+n-x}(a_n b_{m-x} + \cdots + a_{n-x} b_m)$$

$$< q(a')\,10^{m+n-\lambda} + a'\varDelta b + b'\varDelta a + \varDelta a\,\varDelta b$$

$$< q(a')\,10^{m+n-\lambda} + 10^{m+n}\left\{\left(\frac{a_n}{10^\lambda} + \frac{a_{n-1}}{10^{\lambda+1}} + \cdots + \frac{a_{n-\lambda}}{10^{2\lambda}}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{b_m}{10^\lambda} + \frac{b_{m-1}}{10^{\lambda+1}} + \cdots + \frac{b_{m-\lambda}}{10^{2\lambda}}\right)\right\} + 10^{m+n-2\lambda}$$

$$< q(a')\,10^{m+n-\lambda} + 10^{m+n-\lambda}.\,9\,.\frac{2}{1-\frac{1}{10}} + 10^{m+n-2\lambda}.$$

Der Fehler, den man also begeht, indem man das Produkt ab durch das schon abgekürzte Produkt für $a'b'$ ersetzt, ist kleiner als

$$[q(a') + 20]\,10^{m+n-\lambda} + 10^{m+n-2\lambda};$$

und in gewissen Fällen, wo nämlich der Summand 20 eine Vergrößerung der früher bestimmten Zahl λ verlangt, ist die abgekürzte Multiplikation unendlicher Dezimalbrüche anders auszuführen, als die endlicher. So hat man z. B. $\sqrt{38{\cdot}62}$ mit $\sqrt{12{\cdot}38}$ bis auf 0·1 genau zu multiplizieren, indem man 6·214 mit 3·518 auf 0·1 genau rechnet, was 21·8 gibt, und hat nicht bloß 6·21 mit 3·51 zu multiplizieren, was 21·79 liefert.

Nun gehen wir wieder zu der Aufgabe zurück, in $f(a_1, a_2, \ldots a_n)$ solche Näherungswerte einzuführen, daß $\varDelta f$ kleiner als ε werde; wollen aber nur noch einige Aufgaben behandeln, um vor allem die Willkürlichkeit bei der Wahl der absoluten Fehler der Näherungswerte hervortreten zu lassen.

Soll man z. B. $ab = \sqrt{40} \times \sqrt{90}$ ($= 60$) auf $\frac{1}{10^3}$ genau berechnen, so hat man die Forderung zu erfüllen:

$$a'.\varDelta\sqrt{90} + b'.\varDelta\sqrt{40} < \frac{5}{10^4}.$$

Dieser Bedingung wird genügt, wenn man

---

[1]) Biermann, Monatsh. f. Math. u. Physik, Bd XV (s. S. 17, l. c.).

$$7 . \Delta\sqrt{90} + 10 . \Delta\sqrt{40} < \frac{5}{10^4}$$

oder wenn man

$$\Delta\sqrt{90} = \Delta\sqrt{40} < \frac{1}{3}\,\frac{1}{10^4}$$

oder gar kleiner als $\frac{5}{10^5}$ macht. Setzt man

$$\sqrt{40} = 6{\cdot}324\,55, \qquad \sqrt{90} = 9{\cdot}486\,83,$$

so ist, wie schon ein früheres Beispiel (s. S. 32) lehrt, das Produkt bis auf $\frac{1}{10^3}$ gleich 60.

Soll man $\sqrt{8} = 2{\cdot}828\,427\ldots$ mit $\sqrt{50} = 7{\cdot}071\,067\ldots$ bis auf $\frac{1}{10^3}$ genau multiplizieren, so wähle man die Näherungswerte mit Fehlern kleiner als $\frac{5}{10^5}$ oder gar kleiner als $\frac{1}{10^5}$, multipliziere also 2·828 42 mit 7·071 06 bis auf $\frac{1}{10^3}$ genau. Hier ist $\lambda = 5$, also

$$\begin{array}{r}
2{\cdot}828\,42 \\
6\,017\,07 \\
\hline
19\,798\,94 \\
197\,96 \\
2\,82 \\
12 \\
\hline
19{\cdot}999\,84.
\end{array}$$

Soll man die Berechnung von $u = 2r\pi$ auf $\frac{1}{10^2}$ genau ausführen, wenn $2r < 10$ ist, so hat man die Ungleichung zu erfüllen:

$$\Delta u = 2\pi'\Delta r + 2r'\Delta\pi < \frac{5}{10^3},$$

wo π' und r' die Näherungswerte von π und r sein sollen. Man bestimme aber die absoluten Fehler noch besser gemäß der Ungleichung:

$$10\Delta r + 10\Delta\pi < \frac{5}{10^3}$$

oder setze gar

$$10\Delta r < \frac{4}{10^3}, \qquad 10\Delta\pi < \frac{1}{10^3}.$$

Man gebe also π auf vier Dezimalstellen genau, $\pi' = 3{\cdot}1415$, aber r auf fünf Stellen, etwa $r' = 4{\cdot}273\,45$. Doch weil es in dem Produkte nur auf $\frac{1}{10^2}$ genau ankommt, so rechne man:

$$\begin{array}{r} 8{\cdot}5469 \\ 5\,1413 \\ \hline 25\,6407 \\ 8546 \\ 3416 \\ 85 \\ 40 \\ \hline 26{\cdot}8494. \end{array}$$

Wenn $f(a_1, a_2, \dots a_n)$ mehrere Operationen umfaßt, so hat man das bisherige Verfahren mehrmals anzuwenden. Soll z. B.

$$f = r^2 \pi = (4{\cdot}273\,491\dots)^2 . 3{\cdot}141\,592\,60\dots$$

bis auf eine Größe kleiner als $\frac{1}{10^2}$ berechnet werden, so verlange man $r^2 = u$ setzend, daß

$$\varDelta u \pi < \frac{5}{10^3}$$

werde; das wird erreicht, wenn

$$20 \varDelta \pi + 5 \varDelta u < \frac{5}{10^3}$$

oder wenn

$$\varDelta \pi < \frac{1}{10^4}, \qquad \varDelta u < \frac{1}{10^4}$$

gesetzt wird. Man erfülle deshalb, weil $2r < 10$ ist, die Ungleichung

$$\varDelta u = 2r' \varDelta r < \frac{1}{10^4},$$

indem man $\varDelta r < \frac{1}{10^5}$ setzt.

Somit rechne man

$$f = 4{\cdot}273\,49^2 \times 3{\cdot}141\,5$$

auf bloß zwei Dezimalstellen; und das wird

$$57{\cdot}3\overline{7}.$$

Ist der Umfang eines Kreises $u = 6{\cdot}876$, so wird der Radius $\frac{u}{2\pi}$, und wenn man diesen auf $\frac{5}{10^2}$ genau rechnen will,

so hat man, wenn u' und π' die Näherungswerte von u und π sind, die Ungleichung zu erfüllen:

$$\frac{1}{\pi'} \varDelta \frac{u}{2} + \frac{u'}{2\pi'^2} \varDelta \pi < 0{\cdot}045.$$

Hiernach setze man etwa

$$\frac{1}{\pi'} \varDelta \frac{u}{2} < 0{\cdot}01, \qquad \frac{u'}{2\pi'^2} \varDelta \pi < 0{\cdot}03$$

oder aber

$$\varDelta \frac{u}{2} < 0{\cdot}01, \qquad \varDelta \pi < 0{\cdot}1.$$

Wird also

$$\frac{u'}{2} = 3{\cdot}43, \qquad \pi' = 3{\cdot}1$$

gesetzt, so wird in dem Quotienten 1·16 der Fehler gewiß kleiner als $\frac{5}{10^2}$.

Hiermit sind die ersten zwei Fragen der Einleitung behandelt; die dritte Frage, wie man eine näherungsweise Berechnung bis zu gewisser Kleinheit des Fehlers am besten ausführen müsse, mag bei der Wahl der absoluten Fehler zur Richtschnur dienen, doch eine unmittelbare Beantwortung kann man nicht geben. —

Zur näherungsweisen Berechnung ist noch ein wichtiger Begriff, der des relativen Fehlers eines Näherungswertes a' von einer Größe a eingeführt worden. Man versteht darunter das Verhältnis des absoluten Fehlers von a' zu a, also

$$\frac{\varDelta a}{a}.$$

Der relative Fehler gibt ein Maß für die Genauigkeit des Näherungswertes a', denn wenn bei gegebenem a ein Näherungswert a' angebbar ist, dem ein absoluter Fehler zukommt kleiner als der einem zweiten Näherungswerte b' von a zukommende absolute Fehler, so hat a' einen kleineren relativen Fehler als b' und a ist relativ besser durch a' als durch b' bestimmt.

Man sieht nun leicht, daß man die relativen Fehler von solchen Ausdrücken $f(a'_1, a'_2, \ldots a'_n)$ einfach darstellen kann, in denen keine Additionen und Subtraktionen mit den Argumenten zu vollziehen sind, und daß die vorzüglichsten Regeln für die

Bestimmung der relativen Fehler die über die relativen Fehler eines Produktes $a\,b$ und eines Quotienten $\frac{a}{b}$ sind.

Man hat

$$\left|\frac{\Delta\, a\, b}{a\, b}\right| = \left|\frac{b'\,\Delta\, a}{b\, a} + \frac{a'\,\Delta\, b}{a\, b}\right| \leqq \left|\frac{\Delta\, a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta\, b}{b}\right|,$$

$$\left|\frac{\Delta\,\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}}\right| < \left|\frac{\frac{b'\,\Delta\, a + a'\,\Delta\, b}{b'^2}}{\frac{a}{b}}\right| \leqq \left|\frac{\Delta\, a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta\, b}{b}\right|.$$

In der Summe der Beträge der relativen Fehler von den Faktoren eines Produktes oder des Dividends und Divisors eines Quotienten hat man also eine obere Grenze des Betrages des relativen Fehlers des Produktes bzw. des Quotienten.

Es wird aber der relative Fehler der Summe und der Differenz dem Betrage nach der Ungleichung genügen:

$$\left|\frac{\Delta\,(a \pm b)}{a \pm b}\right| \leqq \frac{\Delta\, a + \Delta\, b}{\big|\,|a| - |b|\,\big|}.$$

Zufolge der hier ausgesprochenen Tatsachen wird man es bei der Untersuchung des relativen Fehlers zumeist mit Monomen zu tun nehmen.

Als ein Beispiel für den Gebrauch des relativen Fehlers diene noch die folgende Untersuchung von Poncelet[1]).

Wenn man $\sqrt{x^2 + y^2}$ für die Wertesysteme x, y, deren Verhältnis $\frac{x}{y} = u$ zwischen 1 und ∞ liegt, also bei geometrischer Deutung von x und y als rechtwinkeligen Koordinaten für die Stellen des ersten Quadranten zwischen den Geraden $x = y$ und $y = 0$ näherungsweise durch einen Ausdruck der Form darstellen will

$$\alpha x + \beta y,$$

so wird der Betrag des relativen Fehlers dieses Näherungswertes

$$\left|\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - (\alpha x + \beta y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| = \left|1 - \frac{\alpha u + \beta}{\sqrt{u^2 + 1}}\right|.$$

Der Betrag des relativen Fehlers ist somit eine Funktion von u, und diese erreicht ihr Maximum für $u = \frac{\alpha}{\beta}$ und zwar den Wert

$$\left|\, 1 - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,\right|.$$

---

[1]) Vgl. Lorenz, Technische Mechanik I, S. 197.

Man sieht ferner, daß sich der Betrag des relativen Fehlers bei der Veränderung von $u = 1$ bis $u = \infty$ von

$$\left|1 - \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right| \quad \text{bis} \quad \left|1 - \alpha\right|$$

ändert.

Um nun den Fehler auf diesem Wege möglichst klein zu machen, fordert Poncelet, daß die relativen Fehler für $u = 1$ und $u = \infty$, die von gleichen Zeichen sind, einander gleich werden und daß die Fehler für $u = \infty$ und $u = \frac{\alpha}{\beta}$, die von entgegengesetzten Zeichen sind, absolut genommen gleich groß werden, also

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1 = 1 - \alpha$$

werde [1]).

Man findet so zwei Relationen für α und β

$$\beta = \alpha\left(\sqrt{2} - 1\right) \quad \text{und} \quad \beta^2 = 4 - 4\alpha,$$

aus denen näherungsweise hervorgeht:

$$\alpha = 0{\cdot}961, \qquad \beta = 0{\cdot}398,$$

so daß

$$\frac{\alpha}{\beta} = 2{\cdot}41$$

und das Maximum des Fehlers 0·04 wird.

Doch wenn die Methode der kleinsten Quadrate hier wie auch später als bekannt angesehen wird, so kann man die näherungsweise Darstellung für $\sqrt{x^2 + y^2}$ in dem genannten Gebiete durch

$$0{\cdot}961\, x + 0{\cdot}398\, y$$

auch auf Grund der Forderung finden, daß die Summe der Fehlerquadrate an einer Reihe von Stellen x_i, y_i des früher genannten Bereiches

$$\sum_i \left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - (\alpha x_i + \beta y_i)\right)^2$$

ein Minimum werde.

---

[1]) Die Aussagen betreffs der Zeichen der Fehler für $u = 1, \infty$ und den Quotienten von α durch β kann man machen, wenn man sich über den Verlauf des Betrages des Fehlers von seinem Maximalwerte und dem des Fehlers von seinem Minimalwerte ab mit Hilfe der Vorschriften der Differentialrechnung Aufschluß gegeben hat.

Zweiter Abschnitt.

Das rechnerische Prinzip in der höheren Analysis.

§ 7. Unendliche Reihen in der Rechnung.

Sind die rationalen und irrationalen, also insgesamt die „reellen“ Zahlengrößen in die Rechnung aufgenommen und ordnet man in bekannter Weise jeder Zahl einen Punkt einer Geraden, der „Zahlenlinie“ zu, wonach einem Axiome zufolge jedem Punkte eine Zahl zugehört, so ist — was hier einmal ausgesprochen werden muß — selbstverständlich, daß nach dieser Zuordnung unter einer Stelle a der Zahlenwert a einer einmal unbeschränkt Veränderlichen x, d. h. jedes Wertes fähigen Variablen oder ein andermal einer nur beschränkt Veränderlichen verstanden ist. Es ist bekannt, daß man unter der Umgebung r einer Stelle a die Gesamtheit der Variablenwerte versteht, für die der absolute Betrag von $x - a$ kleiner als r ist, und daß man auch sagt, ein x Wert liege in der Nähe oder in der Nachbarschaft von a und x sei der Werte eines Intervalles fähig usw.

Denkt man nun mit einer in einem bestimmten Intervalle jedes Wertes fähigen Variablen x eine zweite y verbunden, so daß jedem der in Rede stehenden x Werte ein Wert von y entspricht, und wird die Zuordnung durch eine bestimmte Rechenvorschrift bewerkstelligt (wie z. B. beim freien Falle der Weg s und die Zeit t durch die Relation $s = \frac{g}{2}\, t^2$ verknüpft sind), so nennt man y eine eindeutige Funktion von x und schreibt $y = f(x)$ oder $y = \varphi(x)$ usw. Doch wenn die Zuordnung ohne eine bestimmte, bekannte Rechenvorschrift besteht, wie z. B. die der Spannkraft des Wasserdampfes zu seiner Temperatur oder die der Größe der Lufttemperatur an einem Orte, zu der Zeit

dann sprechen wir nur von einer eindeutigen Abhängigkeit $y(x)$ — lies Abhängigkeit y von x —. In beiden Fällen reden wir von einem Zusammenhange zwischen den Größen x und y[1]).

Der Begriff der mehrdeutigen Funktion und Abhängigkeit ergibt sich von selbst.

Jetzt leuchtet auch ein, daß man unter einer Nullstelle einer Funktion $f(x)$ eine solche Stelle versteht, wo die Funktion verschwindet, und daß man bei gegenseitigem Vergleich der Funktion in der Umgebung mehrerer Nullstellen ein- und mehrfache Nullstellen zu unterscheiden haben wird, daß man insbesondere der Nullstelle a von $f(x) = x - a$ die durch das Zusammenrücken von k Nullstellen nach a gebildete k-fache Nullstelle a von $f(x) = (x - a)^k$ gegenüberstellt, wo k eine ganze Zahl ist.

Aus der Analysis ist bekannt, daß man zum Behufe der Berechnung einer bestimmten von einer Variablen x abhängigen Funktion $y = f(x)$ von gewisser Eigenschaft oftmals einfach unendliche Reihen herstellt:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} c_\nu(x),$$

deren Partialsummen

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} c_\nu(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

die Eigenschaft der verlangten Größe immer näher erfüllen, so daß die Berechnung der Größe y durch Aufstellung und Summation der Reihe geleistet wird.

Die hierbei in Rede gebrachte Aufgabe, unbeschränkt viele Operationen auszuführen, erweckt bereits nach den in der Einleitung zur Sprache gebrachten Begriffen auch hier keinen Anstoß und das um so weniger, als die Anwendung einer bloß endlichen Anzahl von Operationen nur die rationalen Zahlengrößen bzw. rationalen Funktionen lieferte.

Nach diesen Äußerungen hat man nun die Aufgabe, eine Funktion $y = f(x)$ in der Umgebung einer Stelle a und insbesondere der Stelle 0 als Summe einer unendlichen Reihe von Funktionen $f_\nu(x)$ darzustellen und hier wieder insbesondere als Summe einer Folge von Gliedern

---

[1]) **Pringsheim**, Encyklopädie, Bd. II, S. 1.

$$f_\nu(x) = c_\nu (x - a)^\nu$$

oder von Gliedern

$$f_\nu(x) = c_\nu x^\nu.$$

Man nennt Reihen von den Formen

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} c_\nu (x - a)^\nu, \qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} c_\nu x^\nu$$

Potenzreihen.

Doch wenn man eine Funktion $y = f(x)$ in der Umgebung einer Stelle a bzw. 0 nach irgendwelcher Methode durch eine Potenzreihe dargestellt, in eine Potenzreihe entwickelt hat, so hat man sich erst zu überzeugen, ob die Reihe auch eine arithmetische Bedeutung hat, das will sagen, ob den Stellen a bzw. 0 auch Umgebungen zugeordnet werden können, für deren Stellen die Reihen konvergieren, d. h. ihre Partialsummen $s_n(x)$ nach bestimmten endlichen Werten konvergieren.

Man sagt, die Entwickelung der Funktion $f(x)$ liefere an einer Stelle b einen ihrer Werte oder ihren Wert $f(b)$, wenn b zu den Stellen gehört, wo die Reihe konvergiert, so daß man also nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Größe δ eine solche ganze Zahl m angeben kann, daß für jedes $n \geqq m$ und für jedes $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$| s_{n+\nu}(b) - f(b) | < \frac{\delta}{2}$$

wird, denn dann ist

$$\lim_{n=\infty} s_{n+\nu}(b) = f(b)$$

und es wird

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} c_\nu (b - a)^\nu = f(b).$$

Früher ist nämlich nur ausgesprochen, daß die Reihe der Partialsummen eine konvergente Zahlenfolge bildet und nach $f(b)$ konvergiert. In der Tat aus den beiden Ungleichungen

$$| s_{n+\nu}(b) - f(b) | < \frac{\delta}{2}, \qquad | s_n(b) - f(b) | < \frac{\delta}{2}$$

folgt:

$$| s_{n+\nu}(b) - s_n(b) | = | [s_{n+\nu}(b) - f(b)] - [s_n(b) - f(b)] |$$
$$\leqq | s_{n+\nu}(b) - f(b) | + | s_n(b) - f(b) | < \delta,$$

— was man bei geometrischer Versinnlichung verfolgen möge — und hier steht nun nur die notwendige und hinreichende Bedin-

gung dafür, daß die Reihe der Partialsummen eine konvergente Zahlenfolge bildet.

Es ist im allgemeinen nicht möglich, das Zutreffen dieser Bedingung für die Konvergenz erfüllt oder nicht erfüllt zu sehen. Und darum stellt man hinreichende Kennzeichen für die Konvergenz von Potenzreihen her. Ohne daß wir hier auf die Fragen der Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen eingehen, sei aber das Cauchysche Kriterium als das wichtigste ausgesprochen.

Wenn der Betrag des Quotienten aus dem Koeffizienten eines Gliedes der Potenzreihe und dem des vorhergehenden Gliedes, wenn

$$\left| \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} \right|$$

bei dem Übergange von ν nach unendlich einen bestimmten endlichen Grenzwert $r = \frac{1}{R}$ besitzt, dann konvergiert die Reihe für alle x Werte, für die der Betrag von $x - a$ kleiner ist als R.

Nach alledem ist es die Hauptaufgabe der Analysis, eine irgendwie vorgegebene Funktion $f(x)$ in der Umgebung einer Stelle a bzw. 0 in eine Potenzreihe zu entwickeln. Das aber geschieht nun, wenn diese Entwickelung überhaupt möglich ist, mit Hilfe der — später ganz nebenbei auftretenden — Taylorschen Formel, die nämlich die Funktion $f(x)$ durch die Summe einer ganzen rationalen Funktion

$$g(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

wo $f^{(\nu)}(a)$ den Wert der νten Ableitung von $f(x)$ an der Stelle a und $\nu!$ (lies ν Fakultät), das Produkt $1.2.3.\cdots\nu$ bezeichnet, und eines Restgliedes ausdrücken lehrt:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \vartheta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

wo nun die positive Zahl $\vartheta < 1$ ist, so daß $a + \vartheta\,(x-a)$ eine zwischen a und x liegende mittlere, aber unbekannte Stelle bedeutet.

Wenn dann für unendlich werdende n

$$\lim R_n(x) = 0$$

wird, so entsteht aus der Taylorschen Formel

$$f(x) = g(x) + R_n(x)$$

die sogenannte Taylorsche Reihe:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots,$$

die für $a = 0$ in die MacLaurinsche

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

übergeht.

§ 8. Auswertung der unendlichen Reihen.

Bevor wir solche Reihen hier in Erinnerung bringen, muß noch von der Berechnung des Wertes einer unendlichen Reihe und von Rechenoperationen mit unendlichen Reihen die Rede sein[1]. Um den Wert einer konvergenten Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$$

an einer Stelle x_0 des „Konvergenzintervalles“ zu finden oder zu beurteilen, hat man nur Partialsummen der Reihe für den Wert x_0:

$$s_n(x_0) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} a_\nu x_0^\nu$$

in Betracht zu ziehen und daneben den Rest der Potenzreihe an der Stelle x_0, d. h. den Wert der Reihe

$$\sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} a_\nu x_0^\nu = R_n(x_0)$$

abzuschätzen, damit man ersehe, inwieweit $s_n(x_0)$ den Wert der Potenzreihe an der Stelle x_0 genau liefert.

Hierzu dienen folgende Sätze[2]:

Ist die Potenzreihe in einer Umgebung r von a konvergent und weiß man bereits, daß die Beträge

$$| a_{n+\nu}(x-a)^\nu | \qquad (\nu = 1, 2 \ldots)$$

für den x Wert x' in der Entfernung $r' < r$ von a kleiner als $g_{r'}$ bleiben, so ist für einen x Wert x_0 noch näher an a, als r' anzeigt

[1]) Runge, Theorie und Praxis der Reihen (Sammlung Schubert XXXII).

[2]) Vergleiche z. B. Biermann, Elemente der höheren Mathematik, S. 294.

$$| R_{n+\nu}(x_0) | < g_{r'} \frac{| x_0 - a |^{n+1}}{r'^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{| x_0 - a |}{r'}}.$$

Bilden aber die Glieder

$$| a_{n+\nu} (x' - a)^{n+\nu} | \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

sogar eine Folge abnehmender Größen, so kann man offenbar

$$g_{r'} = | a_{n+1} | \, | x' - a |^{n+1}$$

setzen, und nun wird

$$| R_{n+\nu}(x_0) | < | a_{n+1} | \frac{| x_0 - a |^{n+1}}{1 - \frac{| x_0 - a |}{r'}}.$$

Stehen endlich die Koeffizienten $a_{n+\nu}$ in solcher Beziehung zueinander, daß

$$\left| \frac{a_{n+\nu+1}}{a_{n+\nu}} \right|$$

mit wachsendem ν immer kleiner wird, und somit

$$\left| \frac{a_{n+\mu}}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{a_{n+\mu}}{a_{n+\mu-1}} \right| \left| \frac{a_{n+\mu-1}}{a_{n+\mu-2}} \right| \cdots \left| \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} \right| \left| \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right| <$$
$$< \left| \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right|^{\mu-1}$$

gilt, so wird

$$| R_{n+\nu}(x_0) | < | a_{n+1} | \, | x_0 - a |^{n+1} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right|^{\mu} \left| x_0 - a \right|^{\mu} <$$
$$< | a_{n+1} | \frac{| x_0 - a |^{n+1}}{1 - \left| \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right| | x_0 - a |}.$$

Kann man auf Grund dieser oder ähnlicher Sätze den Rest einer Potenzreihe abschätzen und kann man für zwei konvergente Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1 (x - a) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu (x - a)^\nu, \qquad \mathfrak{P}_2 (x - a) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} b_\nu (x - a)^\nu$$

solche Partialsummen s_n bzw. σ_n angeben, daß diese Näherungswerte bedeuten, deren absolute Fehler kleiner als $\frac{1}{10^n}$ sind, dann wird der absolute Fehler von $s_n \sigma_n$, welches Produkt näherungsweise statt des Produktes der Reihen gesetzt werden soll,

$$< \frac{1}{10^n} (| s_n | + | \sigma_n |).$$

Ersetzt man aber den Quotienten der beiden Potenzreihen durch $\frac{s_n}{\sigma_n}$, so macht man einen absoluten Fehler

$$\left| \frac{\mathfrak{P}_1(x-a)}{\mathfrak{P}_2(x-a)} - \frac{s_n}{\sigma_n} \right| = \left| \frac{\mathfrak{P}_1 \cdot \sigma_n - \mathfrak{P}_2 \cdot s_n}{\mathfrak{P}_2 \cdot \sigma_n} \right| < \frac{1}{10^n} \frac{|s_n| + |\sigma_n|}{\sigma_n^2}.$$

Soll man

$$\sqrt{\mathfrak{P}_1} = \sqrt{s_n + R_n}$$

berechnen, wo $s_n > 0$ vorausgesetzt werde, und setzt man auch R_n als positiv voraus, so ist der absolute Fehler, den man dadurch begeht, daß man $\sqrt{\mathfrak{P}_1}$ durch $\sqrt{s_n}$ ersetzt:

$$\left| \sqrt{\mathfrak{P}_1} - \sqrt{s_n} \right| = \left| \frac{\mathfrak{P}_1 - s_n}{\sqrt{\mathfrak{P}_1} + \sqrt{s_n}} \right| < \frac{R_n}{2\sqrt{s_n}} < \frac{1}{10^n} \frac{1}{2\sqrt{s_n}}.$$

Ebenso wird

$$\left| \sqrt[3]{\mathfrak{P}_1} - \sqrt[3]{s_n} \right| = \left| \frac{\mathfrak{P}_1 - s_n}{\sqrt[3]{\mathfrak{P}_1^2} + \sqrt[3]{\mathfrak{P}_1 s_n} + \sqrt[3]{s_n^2}} \right| < \frac{R_n}{3\sqrt[3]{s_n^2}} <$$

$$< \frac{1}{10^n} \frac{1}{3\sqrt[3]{s_n^2}} \text{ usw.,}$$

was in anderer Form auch schon früher (s. S. 28) ausgesprochen war.

§ 9. Berechnung des Logarithmus.

So vorbereitet kommen wir nun auf die Berechnung des natürlichen Logarithmus einer positiven Zahl zu sprechen. Die Basis des natürlichen Logarithmus einer positiven Zahl a, der mit $l\,a$ bezeichnet werde, ist bekanntlich

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = 2{\cdot}718\,281\,828\ldots,$$

die hier nicht näher einzuführen ist. Man hat also

$$e^{l\,a} = a,$$

und es ist

$$\frac{d\,l\,x}{d\,x} = \frac{1}{x}.$$

Man findet nun in jedem Buche über Differentialrechnung die νte Ableitung nach x von $l\,(1+x)$ an der Stelle $x = 0$

$$\left[\frac{d^\nu l(1+x)}{dx^\nu}\right]_{x=0} = \left[(-1)^{\nu-1}\frac{(\nu-1)!}{(1+x)^\nu}\right]_{x=0},$$

wo die den Klammerausdrücken beigefügten Aussagen $x = 0$ bedeuten sollen, daß man die Klammerausdrücke an der Stelle $x = 0$ zu nehmen habe. Die Entwickelung der Funktion $l(1+x)$ nach Potenzen von x lautet daher nach der MacLaurinschen Reihe

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

und zwar hat diese Reihe nach dem Konvergenzkriterium von Cauchy für solche x Werte eine arithmetische Bedeutung, die dem Betrage nach kleiner sind als eins.

Ebenso konvergiert in dem Intervalle von -1 bis $+1$ die MacLaurinsche Reihe für $l(1-x)$

$$l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

Wenn man die beiden Reihen voneinander subtrahiert, so folgt:

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

Wenn man aber $l(1 \pm x)$ durch die Taylorschen Formeln darstellt:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \cdots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{1}{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(1+\vartheta_1 x)^{2n+1}}$$

bzw.

$$-\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n}\right) - \frac{1}{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(1-\vartheta_2 x)^{2n+1}},$$

wo ϑ_1 und ϑ_2 zwischen 0 und 1 liegende unbekannte Zahlen sind, so erhält man

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) + R_{2n}(x),$$

und zwar ist

$$R_{2n}(x) = \frac{1}{2n+1}\left\{\left(\frac{x}{1+\vartheta_1 x}\right)^{2n+1} + \left(\frac{x}{1-\vartheta_2 x}\right)^{2n+1}\right\}.$$

Setzt man

$$\frac{1+x}{1-x} = y, \quad \text{also} \quad x = \frac{y-1}{y+1},$$

so daß dann, wenn x das Intervall von -1 bis $+1$ durchläuft, sich y von 0 bis $+\infty$ ändert, so erhält man die Entwickelung:

$$l\,y = 2\left[\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \cdots\right].$$

Wenn man gar noch

$$y = 1 + \frac{z}{a}$$

setzt, wo a eine positive Größe sei und sich nun z von $-a$ bis $+\infty$ ändern kann und

$$x = \frac{z}{z+2a}$$

gilt, so entsteht die Entwickelung:

$$l(z+a) = l\,a + 2\left[\frac{z}{z+2a} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z+2a}\right)^3 + \cdots\right].$$

Das Restglied in der entsprechenden Taylorschen Formel

$$l\left(\frac{z+a}{a}\right) = 2\left[\frac{z}{z+2a} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\left(\frac{z}{z+2a}\right)^{2n-1}\right] + \\ + R_{2n}\left(\frac{z}{z+2a}\right)$$

heißt dann:

$$R_{2n}\left(\frac{z}{z+2a}\right) = \frac{1}{2n+1}\left[\left(\frac{z}{2a+z(1+\vartheta_1)}\right)^{2n+1} + \\ + \left(\frac{z}{2a+z(1-\vartheta_2)}\right)^{2n+1}\right]$$

und weil hier jede der Potenzen bei positivem z kleiner als $\left(\frac{z}{2a}\right)^{2n+1}$ ist, so wird der Fehler in der für $z = 1$ entstehenden besonderen, alsbald zur Anwendung gelangenden Formel

$$l(a+1) = l\,a + 2\left[\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2a+1}\right)^3 + \cdots\right]$$

beim Abbrechen der Reihe mit dem Gliede

$$2\,\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{2a+1}\right)^{2n-1}$$

kleiner als

$$\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{2a}\right)^{2n+1}.$$

Will man somit im Falle $a = 1$, $z = 1$ den natürlichen Logarithmus von zwei näherungsweise durch

$$2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^5}\right] = 0{\cdot}693\,004\,115\,\ldots$$

ausdrücken, so ist der Fehler kleiner als

$$\frac{2}{7\,.\,2^7} < \frac{3}{10^3}.$$

Doch wenn man $l\,2$ näherungsweise durch

$$2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{11}\frac{1}{3^{11}}\right] = 0{\cdot}693\,147\,073\,\ldots$$

ausdrückt, so ist der Fehler kleiner als

$$\frac{1}{13\,.\,2^{12}} < \frac{2}{10^5},$$

und in solcher Weise findet man auf fünf Dezimalstellen genau

$$l\,2 = 0{\cdot}693\,14\,\cdots.$$

Jetzt ist es ein Leichtes, nach und nach die Logarithmen der Primzahlen etwa kleiner als 20 zu finden, wenn man noch die bekannten Relationen heranzieht:

$$l\,(xy) = l\,x + l\,y, \qquad (l\,x^n = n\,l\,x)$$

$$l\left(\frac{x}{y}\right) = l\,x - l\,y.$$

Es wird für $a = 8$, $z = 1$:

$$l\left(\frac{9}{8}\right) = l\left(\frac{3^2}{2^3}\right) = 2\,l\,3 - 3\,l\,2 = 2\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3}\frac{1}{17^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{17^5} + \cdots\right),$$

und hieraus folgt:

$$l\,3 = 1{\cdot}098\,61\,\ldots;$$

dann wird für $a = 80$, $z = 1$:

$$l\left(\frac{81}{80}\right) = 4\,l\,3 - l\,5\,.\,2^4 = 2\left[\frac{1}{161} + \frac{1}{3}\frac{1}{161^3} + \cdots\right],$$

und aus dieser Gleichung folgt:

$$l\,5 = 1{\cdot}609\,43\,\cdots.$$

Für $a = 2400$, $z = 1$ ergibt sich aus

$$l\left(\frac{2401}{2400}\right) = l\,\frac{7^4}{2^5\,.\,3\,.\,5^2} = 2\left[\frac{1}{4801} + \frac{1}{3}\frac{1}{4801^3} + \cdots\right]$$

$$l\,7 = 1{\cdot}945\,91\,\cdots.$$

Im Falle $a = 120$, $z = 1$ findet man eine Relation für

$$l\,11 = 2{\cdot}397\,89\ \ldots,$$

indem

$$l\left(\frac{121}{120}\right) = l\left(\frac{11^2}{2^3 . 3 . 5}\right) = 2\left[\frac{1}{241} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{241^3} + \cdots\right]$$

ist. Für $a = 168$ und $z = 1$ findet man

$$l\left(\frac{169}{168}\right) = l\left(\frac{13^2}{2^3 . 3 . 7}\right) = 2\left[\frac{1}{337} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{337^3} + \cdots\right]$$

und nun

$$l\,13 = 2{\cdot}564\,94 \cdots.$$

Ebenso führt

$$a = 2^4 = 16,\quad z = 1,\quad l\,17 = 2{\cdot}833\,21\ \ldots$$

herbei, und endlich, wenn

$$a = 360 = 2^3 . 3^2 . 5,\quad z = 1$$

ist, wird

$$l\,19 = 2{\cdot}944\,43 \cdots.$$

Nun kann man den Logarithmus jeder aus den bisherigen Primzahlen zusammengesetzten ganzen Zahl herstellen. Doch wir geben hier nur

$$l\,10 = l\,2 + l\,5 = 2{\cdot}302\,585\,092\,6\ \ldots$$

an und gerade diesen „natürlichen Logarithmus", weil man diesen Wert zur Angabe des Briggschen Logarithmus, d. i. des Logarithmus einer positiven Zahl in Beziehung auf die Basis 10, nötig hat.

Bezeichnet man diesen Logarithmus von a mit $\log a$, so liefert die Logarithmierung der Identitäten

$$e^{l\,a} = a, \qquad e^{l\,10} = 10:$$

$$l\,a . \log e = \log a, \qquad l\,10 . \log e = \log 10 = 1$$

und somit

$$\log a = \frac{l\,a}{l\,10} = M . l\,a,$$

d. h. man findet den Briggschen Logarithmus von a, indem man den natürlichen Logarithmus mit dem schon an früherer Stelle (siehe S. 22) berechneten reziproken Werte von $l\,10$, nämlich mit

$$M = \frac{1}{l\,10} = 0{\cdot}434\,294\ \ldots,$$

d. i. dem Modul des Briggschen Logarithmensystems, multipliziert.

Nach diesen Auseinandersetzungen kann man also auch die Berechnung des Briggschen Logarithmus jeder aus den Primzahlen kleiner als 20 zusammengesetzten ganzen Zahl als erledigt betrachten; auch macht es keine Schwierigkeiten, zunächst den natürlichen Logarithmus einer anderen Primzahl herzustellen und hierauf den Briggschen Logarithmus.

§ 10. Das Restglied der Binomialreihe.

Wendet man die Taylorsche Formel auf die Funktion

$$f(x) = (1 + x)^m$$

an, so erhält man:

$$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \cdots + \binom{m}{n} x^n + R_n(x),$$

wo

$$R_n(x) = \binom{m}{n+1} (1 + \vartheta x)^{m-(n+1)} x^{n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

ist und

$$\binom{m}{\nu} = \frac{m(m-1)\ldots(m-\nu+1)}{1.2.\cdots\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots (n+1)$$

bedeutet. In der Differentialrechnung zeigt man ausführlich, daß der Rest für einen x Wert von kleinerem Betrage als eins mit wachsendem n dem Betrage nach immer kleiner wird und daß in dem Intervalle von -1 bis $+1$ die Mac Laurinsche Reihe gilt:

$$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \cdots.$$

Darum aber wird

$$(a + b)^m = a^m \left[1 + \frac{b}{a}\right]^m,$$

wenn $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ ist, in der Form darzustellen sein:

$$(a + b)^m = a^m \left[1 + \binom{m}{1}\frac{b}{a} + \binom{m}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots\right];$$

z. B.

$$\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{5^3 + 10} = 5\left(1 + \frac{10}{125}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 5\left(1+\frac{8}{10^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 5\left[1+\frac{1}{3}\,\frac{8}{10^2} - \frac{2}{3^2.2!}\left(\frac{8}{10^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{2.5}{3^3.3!}\left(\frac{8}{10^2}\right)^3 - \cdots\right].$$

Doch die letzte Formel und ihre Anwendung zur Berechnung einer vorgegebenen Wurzel kann auf eine viel bequemere Form gebracht werden. Wenn man die frühere Taylorsche Formel dadurch umändert, daß man m durch $-m$, x durch $-x$ ersetzt, so ergibt sich:

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m+1)}{1.2}x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2.\cdots n}x^n + R_n(x),$$

und zwar ist

$$R_n(x) = \frac{m(m+1)\ldots(m+n)}{1.2.\cdots(n+1)}\,\frac{x^{n+1}}{(1-\vartheta x)^{m+n+1}}.$$

Setzt man aber hierin

$$x = \frac{z}{z+1}, \quad \text{also} \quad z = \frac{x}{1-x},$$

so daß z das Intervall von $-\frac{1}{2}$ bis $+\infty$ durchläuft, während x das von -1 bis $+1$ durchschreitet, so wird:

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}\,\frac{z}{z+1} + \cdots$$
$$+ \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2.\cdots n}\left(\frac{z}{z+1}\right)^n + R_n$$

und

$$R_n = \frac{m(m+1)\ldots(m+n)}{1.2.\cdots(n+1)}\,\frac{z^{n+1}(z+1)^m}{[1+(1-\vartheta)z]^{m+n+1}}.$$

Um dieses Restglied, das im Zähler wieder den Faktor $(1+z)^m$ enthält, zu beurteilen, wird man, wenn ein besonderer Fall hervorgehoben werden soll, im Falle eines positiven $z < 1$ einen solchen Wert α aufsuchen, der größer ist als $(1+z)^m$; dann sieht man, daß

$$R_n < \alpha\,\frac{m(m+1)\ldots(m+n)}{1.2.\cdots(n+1)}\,z^{n+1}$$

wird, denn der von z abhängende Faktor im Nenner ist in dem vorliegenden Falle eines positiven z kleiner als 1 stets größer als 1.

Danach bestimme man für

$$z = \frac{8}{10^2} : \frac{z}{z+1} = \frac{8}{108} = \frac{2}{27}$$

und setze

$$\sqrt[3]{135} = 5\left[1 + \frac{1}{3}\,\frac{2}{27} + \frac{1.4}{3^2.2!}\left(\frac{2}{27}\right)^2 + \frac{1.4.7}{3^3.3!}\left(\frac{2}{27}\right)^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1.4.7.10}{3^4.4!}\left(\frac{2}{27}\right)^4 + R_4\right] =$$

$$\begin{aligned} = 5\ [&1{\cdot}000\,000\,0 \cdots \\ &+ 0{\cdot}024\,691\,3 \cdots \\ &+ 0{\cdot}001\,219\,3 \cdots \\ &+ 0{\cdot}000\,070\,2 \cdots \\ &+ 0{\cdot}000\,004\,3 \cdots + R_4] = 5\ [1{\cdot}025\,985\,1 \cdots + R_4] \end{aligned}$$

und somit

$$\sqrt[3]{135} = 5{\cdot}129\,92 \cdots + 5\,R_4.$$

Indem man $\alpha = 1{\cdot}03$ setzt, so erhält man

$$R_4 < 1{\cdot}03 \cdot \left(\frac{1.4.7.10.13}{3^5.5!}\right)\left(\frac{2}{27}\right)^5 < \frac{1}{10^8},$$

und danach sind die früher berechneten fünf Dezimalstellen der dritten Wurzel von 135 sicher richtig.

Damit soll der Leser die für die Folge erwünschte arithmetische Vorbereitung gefunden haben.

Dem Namen nach hier noch zu nennende rechnerische Aufgaben betreffen einerseits die Transformation von unendlichen Reihen in andere, die schneller konvergieren[1]), und andererseits die sogenannten halbkonvergenten Reihen[2]), d. h. nicht konvergente, sondern — wie man sagt — divergente Reihen und zwar solcher Art, daß bei einer einmal passend gesetzten Anordnung der Summanden die Partialsummen $S_n(x)$ einen gegebenen arithmetischen Ausdruck mit verhältnismäßig großer, aber nur mit begrenzter, d. h. nicht mit beliebig fortzusetzender Annäherung darstellen.

---

[1]) Vgl. in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften den Aufsatz von Pringsheim, Bd. I, S. 101; Runge (s. S. 44, l. c.).

[2]) Ebendort, S. 103.

Eine solche halbkonvergente Reihe tritt z. B. bei Behandlung des in der Wahrscheinlichkeitslehre wichtigen Integrales

$$\int_0^t e^{-t^2} dt$$

auf.

Andere Reihen dieser Art haben die sehr bemerkenswerte Eigenschaft, daß der Grenzwert von $x^n S_n(x)$ für wachsende x Werte gleich wird

$$\lim_{x=\infty} x^n F(x),$$

in welchem Falle Poincaré[1]) sagt, daß die Summen $S_n(x)$ eine asymptotische Darstellung von $F(x)$ liefern, worauf er die Reihe eine asymptotische nennt.

---

[1]) Poincaré, Acta mathematica 8, 295.

Dritter Abschnitt.

Näherungsweise Auflösung von Gleichungen.

---

§ 11. Die graphische Darstellung einer Funktion und einer Abhängigkeit[1]).

Hier besprechen wir aus alsbald sich ergebenden Gründen zuerst die graphische Darstellung eines Zusammenhanges zwischen zwei Größen x und y; z. B. wenn die einzelnen, auf Grund von Beobachtung festgestellten x Werten $x_1, x_2, \ldots x_n$ zugehörigen y Werte, die $y_1, y_2, \ldots y_n$ heißen, auch durch Beobachtung gegeben sind, so daß die zusammengehörigen Wertepaare x_ν, y_ν nur näherungsweise bekannt sind. Man beachte jedoch, daß auch im Falle einer Funktion $y = f(x)$ die bestimmten, einfachen und willkürlich zu wählenden x Werten zugehörigen y Werte im allgemeinen nur näherungsweise angegeben werden und deshalb auch hier die zusammengehörenden Wertepaare x_ν, y_ν des Zusammenhanges nur ungenau bekannt sein werden.

Ordnet man diesen Wertepaaren (x_ν, y_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ in einer Zeichnenebene mit einem Achsenkreuze in bekannter Weise Punkte P_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ mit den Koordinaten x_ν, y_ν zu, so werden auch bei Eintragung dieser Punkte in die Zeichnenebene Fehler gemacht werden. Will man hierauf die Kurve angeben, die den wahrscheinlich genauesten Verlauf der Funktion oder Abhängigkeit zeigt, wir sagen den wahrscheinlichsten Zusammenhang zwischen den Veränderlichen x und y geometrisch darstellt, so beachte man unter der Annahme, daß die Fehler keine regelmäßigen seien, also etwa auf einen Fehler eines Meßinstrumentes oder auf eine Anomalie des Beobachters zurückführ-

---

[1]) Berger, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 49, S. 306.

bare, sondern daß die Fehler zufällige seien, daß zum Zwecke der Zeichnung der Kurve gemäß der Lehre von den Beobachtungsfehlern folgende Momente festzuhalten sind:

1. Daß positive und negative Fehler, die den Punkten P_ν anhaften, gleich häufig vorkommen werden und somit bei großem n ebensoviele der eingetragenen Stellen oberhalb als unterhalb der zu zeichnenden Kurve angeordnet sein werden.

2. Daß kleine Fehler häufiger vorkommen werden als große, ja daß sogar die algebraische Summe der Fehler nahezu null sein wird.

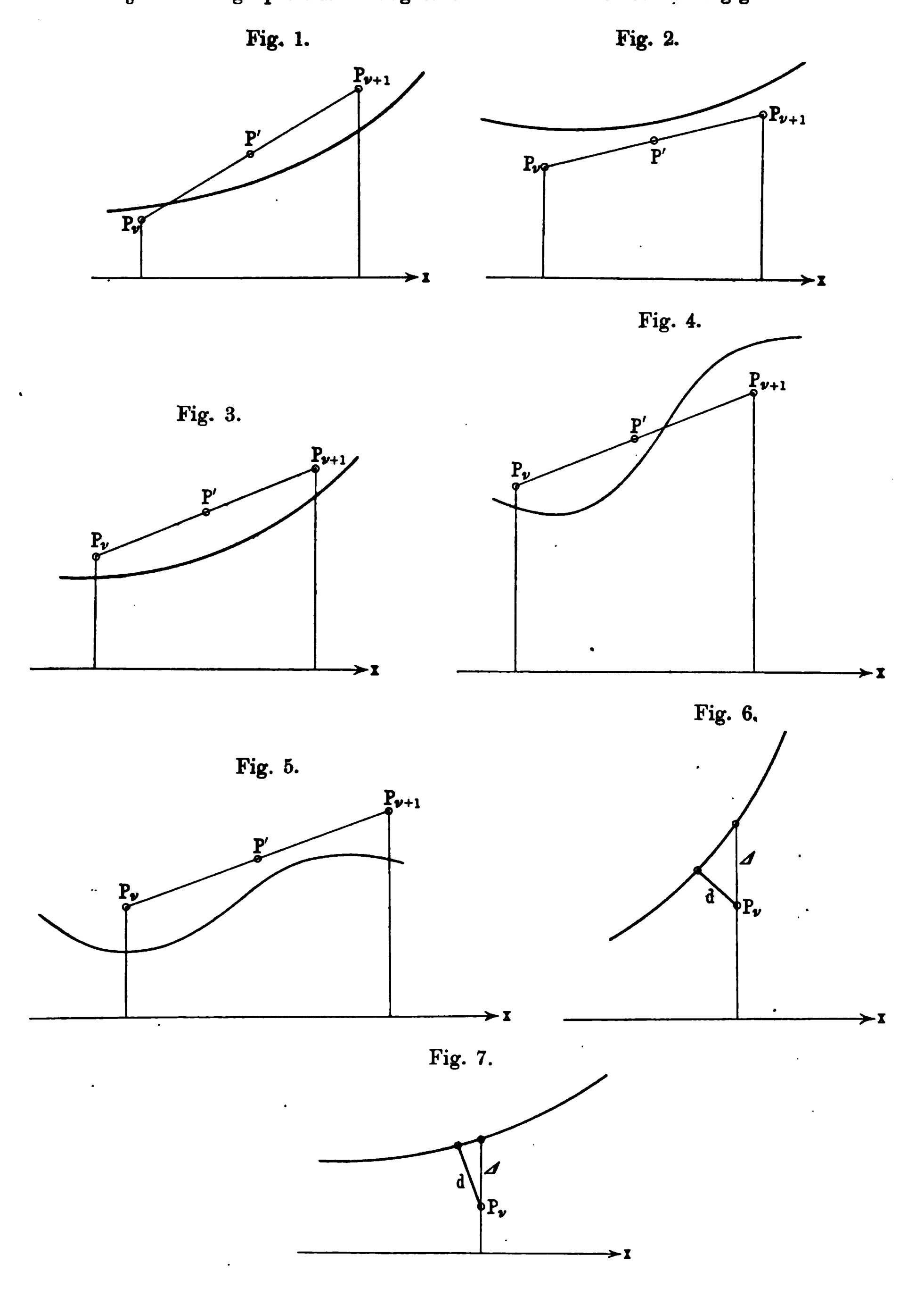
3. Daß man jeden Punkt P_ν mit einem Wertigkeitskoeffizienten versehen, mit einem gewissen Gewichte ausstatten kann, das man etwa durch eine um P_ν gelegte Kreisfläche darzustellen vermöchte, und daß der Schwerpunkt zweier aufeinander folgenden bewerteten Punkte P_ν und $P_{\nu+1}$ der wahrscheinlichsten Form der verlangten Kurve näher liegen wird als die zwei gegebenen Punkte.

Die Bestimmung von Schwerpunkten aufeinander folgender Punkte P_ν und $P_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots (n-1))$, die bei gleichen Gewichten in die Halbierungspunkte der geradlinigen Verbindungsstrecken aufeinander folgender Stellen fallen, kann nicht ohne weiteres mehrere Male wiederholt werden, wenn man Punkte haben will, die der wahrscheinlichsten, auch einmal ganz unbekannten Kurve immer näher liegen, weil die Größe und die Richtung des einzelnen Fehlers in jedem Falle ganz unbekannt sind.

Aus den nachfolgenden Zeichnungen (Fig. 1 bis 5) ist zu ersehen, welches die Größe und die Richtung des Fehlers ist, den der aus zwei Punkten P_ν und $P_{\nu+1}$ von gleichen Gewichten gewonnene Schwerpunkt P' gegenüber der bekannt gedachten Kurve besitzt.

Es liegen P_ν und $P_{\nu+1}$ auf ungleichen oder gleichen Seiten der Kurve oder diese kehrt einmal ihre konvexe, ein andermal ihre konkave Seite zur Verbindungslinie der Punkte und endlich schneidet die Verbindungsstrecke von P_ν und $P_{\nu+1}$ die Kurve in der Nähe eines Wendepunktes oder schneidet sie nicht.

Ferner leuchtet aus den weiteren zwei Zeichnungen (Fig. 6 und 7) auch ein, daß eine Kurve von der fehlerhaften Stelle P_ν um so mehr abweicht (bei gleichem $d\,\Delta$ um so größer ist), je steiler sie in der Nähe von P_ν gegenüber der x Achse verläuft und um so weniger abweicht, je geringer die Neigung gegen die x Achse ist.


Fig. 1.
P
P'
P
x
Fig. 2.
P
P'
P
x
Fig. 3.
P
P'
P
x
Fig. 4.
P
P'
P
x
Fig. 5.
P
P'
P
x
Fig. 6.
d
P
x
Fig. 7.
d
P
x

Unter den genannten Gesichtspunkten zeichne man bei den späteren Aufgaben die dort in Rede kommenden Kurven, die den Verlauf von Funktionen und Abhängigkeiten auf Grund von näherungsweise zutreffenden Berechnungen oder fehlerhaften Beobachtungen an einzelnen Stellen angeben sollen und entnehme aus einer Figur, wie das der Techniker oftmals macht und machen muß, den ungefähren Wert der abhängigen Größe für neue Werte der unabhängigen Variablen.

§ 12. Eine geometrische Lösungsmethode algebraischer Gleichungen.

Wir behandeln nun in erster Linie eine konstruktive Lösungsmethode algebraischer Gleichungen

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

mit reellen Koeffizienten, wenn dabei auch mancher Beweis unterdrückt werden muß.

Ist eine Gleichung zweiten Grades mit reellen Koeffizienten vorgelegt:

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0,$$

so bestimme man die sie befriedigenden zwei Variablenwerte etwa in folgender Weise durch eine Konstruktion: Man setze erst $x^2 = y$, worauf die Gleichung zweiten Grades in die folgende übergeht:

$$a_0 y + a_1 x + a_2 = 0,$$

deute x und y als rechtwinkelige Koordinaten der Punkte einer Ebene, dann treten die Lösungen als die Abszissen der Schnittpunkte der Parabel und der Geraden mit den Gleichungen

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad \frac{x}{-\frac{a_2}{a_1}} + \frac{y}{-\frac{a_2}{a_0}} = 1$$

auf.

Zeichnet man also die Parabel, deren Scheitel in den Anfangspunkt und deren Hauptdurchmesser in die positive y Achse fällt, und zeichnet die Gerade, die auf der Abszissen- und Ordinatenachse die Abschnitte

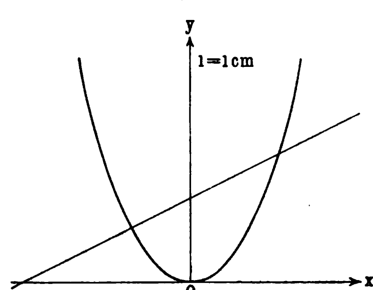
$$-\frac{a_2}{a_1} \quad \text{und} \quad -\frac{a_2}{a_0}$$

von dem Koordinatenanfangspunkte ab hervorruft, so hat man in der Abmessung der Abszissen der Schnittpunkte beider Gebilde das Mittel, die Lösungen der Gleichung in einem willkürlich zugrunde gelegten Maßstabe näherungsweise anzugeben. —

Sind die Schnittpunkte nicht reell, so sind es auch nicht die Wurzeln.

So zeigen die Schnittpunkte der genannten Parabel und der Geraden $x - 2y + 3 = 0$ (Fig. 8) die Abszissen -1 und $\frac{3}{2}$,

Fig. 8.



und danach sind die Lösungen der Gleichung $2x^2 - x - 3 = 0$ eben -1 und $\frac{3}{2}$.

Ist die Gleichung dritten Grades aufzulösen:

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$

so setze man wieder $x^2 = y$. Dann sind die Lösungen der vorgegebenen Gleichung als die Abszissen der im Endlichen gelegenen Schnittpunkte der Parabel und der Hyperbel mit der Gleichung

$$a_0 x y + a_1 y + a_2 x + a_3 = 0$$

zu betrachten.

Die Asymptoten dieser Hyperbel sind parallel den Koordinatenachsen und schneiden einander in dem Punkte mit den Koordinaten

$$\xi = -\frac{a_1}{a_0}, \quad \eta = -\frac{a_2}{a_0},$$

und der im Endlichen gelegene Schnittpunkt der Hyperbel mit der x Achse, wo $y = 0$ ist, hat die Abszisse $-\frac{a_3}{a_2}$.

Sind diese Elemente bekannt, so kann man die Hyperbel in einer Weise zeichnen, wie alsbald bei Behandlung der Gleichungen

vierten Grades näher zu beschreiben sein wird, und die Abszissen ihrer Schnittpunkte mit der Parabel geben die Lösungen unserer Gleichung dritten Grades.

Liegt die Gleichung vierten Grades vor:

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

so setze man wieder $x^2 = y$, schreibe also die Gleichung vierten Grades in der Gestalt:

$$a_0 y^2 + a_1 x y + a_2 y + a_3 x + a_4 = 0.$$

Dann sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung als die Abszissen der Schnittpunkte der Parabel und der Kurve zweiter Ordnung zu deuten, die durch die letzte Gleichung definiert ist; sie stellt eine Hyperbel dar.

Die eine Asymptote dieser Hyperbel läuft parallel zur x Achse, die andere aber unter einem Winkel gegenüber der positiven Richtung der x Achse, dessen Tangente $-\frac{a_1}{a_0}$ ist. Die beiden Asymptoten schneiden einander in dem Mittelpunkte C der Hyperbel und dieser hat die Koordinaten:

$$\xi = \frac{2 a_0 a_3 - a_1 a_2}{a_1^2}, \quad \eta = \frac{-a_3}{a_1}.$$

Die Gleichungen der Asymptoten lauten daher:

$$a_1 y + a_3 = 0, \quad a_1 x + a_0 y + \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = 0,$$

und endlich der früher genannte Schnittpunkt der Hyperbel mit der x Achse besitzt die Abszisse $-\frac{a_4}{a_3}$.

Zeichnen wir aber von einer Hyperbel, wie in dem letzten Falle, ihre Asymptoten und nehmen noch einen ihrer Punkte M auf wie z. B. einen ihrer Schnittpunkte mit der x Achse, so findet man bekanntlich den auf einer Parallelen g zu der einen Asymptote befindlichen Hyperbelpunkt, indem man durch M eine Parallele zur zweiten Asymptote legt, die g in dem Punkte A schneide (Fig. 9), dann den Punkt A mit dem Mittelpunkte der Hyperbel verbindet und nachsieht, wo diese Verbindungslinie die durch M gelegte Parallele zur ersten Asymptote schneidet und durch den Schnittpunkt B eine Parallele zur zweiten Asymptote legt. Dort wo diese die Gerade g schneidet, in dem Punkte M' der Figur, hat man einen Hyperbelpunkt.

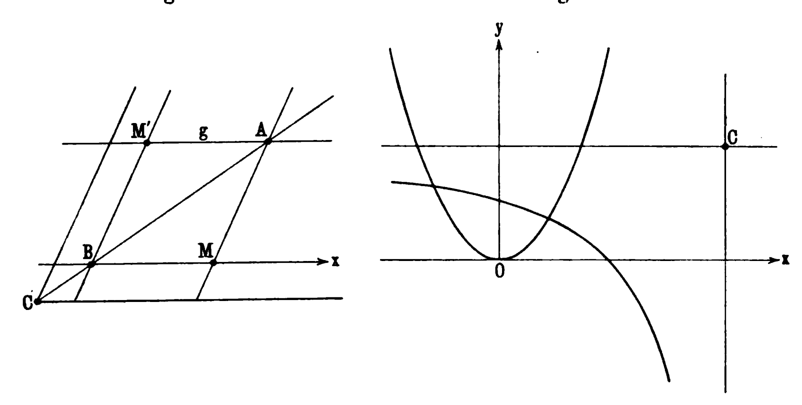
Danach kann man die Hyperbel zeichnen und somit die reellen Wurzeln der Gleichung vierten Grades näherungsweise angeben.

Im Falle der Gleichung dritten Grades

$$x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$$

hat der Mittelpunkt der Hyperbel die Koordinaten (4, 2) und die Hyperbel schneidet die x Achse in der Entfernung 2 vom

Fig. 9. Fig. 10.



Anfangspunkte. Aus der Fig. 10 ersieht man zwei näherungsweise Werte $x_1 = -1{\cdot}1$, $x_2 = 0{\cdot}8$. Der dritte außerhalb der Zeichnenfläche liegende Schnittpunkt hat eine solche Abszisse x_3, daß die Summe $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ ist; man hat danach $x_3 = 4{\cdot}3$.

Als zweites Beispiel führen wir das folgende aus: Es sei

$$x^3 - 4x + \frac{4}{3} = 0$$ [1],

so wird $\xi = 0$, $\eta = 4$ und es ist

$$y = \frac{12x - 4}{3x}.$$

Aus der Fig. 11 (a. f. S.) liest man ab:

$$x_1 = 0{\cdot}34, \quad x_2 = 1{\cdot}82, \quad x_3 = -2{\cdot}12.$$

In dem besonderen Falle der Gleichung

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 6 = 0$$

besitzt der Mittelpunkt C die Koordinaten

$$(-1, \ -\tfrac{3}{2}),$$

[1]) Zimmermann, Eisenbahn-Oberbau, S. 193.

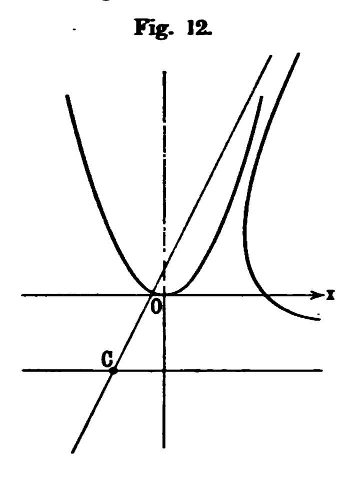
die Gleichungen der Asymptoten lauten:

$$2y + 3 = 0, \quad y - 2x = \tfrac{1}{2}$$

und der im Endlichen gelegene Schnittpunkt der Hyperbel mit der x Achse hat die Abszisse 2. Aus der Zeichnung Fig. 12 liest man ab, daß es keine reellen Wurzeln gibt.

Fig. 11.

Fig. 12.



Im Falle einer algebraischen Gleichung $n$ten Grades mit reellen Koeffizienten

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

gehe man dadurch in entsprechender Weise vor, daß man die Kurven mit den Gleichungen

$$y = x^{n-1}, \quad a_0 x y + a_1 y + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

mit Hilfe einer Reihe ihnen angehörender, bloß durch eine begrenzte Anzahl einfacher Rechnungsoperationen zu bestimmender Punkte näherungsweise zeichnet und die Abszissen der im Endlichen gelegenen Schnittpunkte abmißt. Diese Abmessungen liefern näherungsweise die reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung $n$ten Grades.

§ 13. Mehrfache Nullstellen.

Nach dieser Vorschrift zur Ermittelung von Näherungswerten reeller Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$f(x) = 0$$

soll durch eine Betrachtung der Differentialgeometrie erwiesen werden, daß jede mehrfache reelle Nullstelle von $f(x)$ auch Nullstelle der durch den Ableitungsprozeß zu gewinnenden Funktion $f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + 2 a_{n-2} x + a_{n-1}$, d. h. der ersten Ableitung $f'(x)$ ist[1]).

In der Tat soll $f(x)$ eine zweifache Nullstelle haben, die wir durch das Zusammenrücken zweier einfachen Nullstellen entstanden denken, so werden die den Gleichungen

$$y = x^{n-1}, \quad a_0 x y + a_1 y + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

zukommenden Kurven in ihr eine gemeinsame Tangente haben. Daher kann man zunächst sagen, damit eine Doppelwurzel der Gleichung $f(x) = 0$ bestehe, müssen an Stellen von gleicher Abszisse die Richtungskoeffizienten der Tangenten, das sind die Werte für $\frac{dy}{dx}$ übereinstimmen, d. h. es müssen für dasselbe x die Ausdrücke

$$(n-1) x^{n-2}$$

und

$$\left(\frac{-1}{a_0 x + a_1}\right) [a_0 y + (n-2) a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}]$$

einander gleich sein. Doch weil in demselben Punkte auch die zu gleichen x Werten gehörenden Ordinaten y übereinstimmen müssen, so folgt die Gleichung

$$a_0 (n-1) x^{n-1} + y a_0 = n a_0 x^{n-1} = \\ = -[(n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}]$$

oder

$$f'(x) = 0.$$

Nennt man die zweifache Nullstelle, die bestehe, x_1, so wird also die Taylorsche Entwickelung von $f(x)$ in der Umgebung von x_1:

$$f(x) = (x - x_1)^2 \frac{f''(x_1)}{2!} + \cdots + (x - x_1)^n \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}.$$

Sollen drei Nullstellen von $f(x)$ zusammenfallen, so werden auch zwei Nullstellen von $f'(x)$ vereinigt liegen, d. h. auch $f''(x)$ wird für einen x Wert, der $f(x)$ und $f'(x)$ zum Verschwinden bringt, null sein müssen, aber $f'''(x)$ wird für diesen nicht verschwinden. Ebenso ergibt sich, daß die Bedingungen dafür, daß eine Nullstelle x_1 von $f(x)$ k-fache Nullstelle sei, lauten:

---

[1]) Biermann, Monatsh. f. Math. u. Physik, Bd. XIII.

Es muß an dieser Stelle x_1

$$f'(x),\quad f''(x),\quad \ldots\quad f^{(k-1)}(x)$$

verschwinden, aber $f^{(k)}(x_1)$ von null verschieden sein, und die entsprechende Taylorsche Entwickelung von $f(x)$ in der Umgebung dieser Nullstelle heißt:

$$f(x) = (x - x_1)^k \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} + (x - x_1)^{k+1} \frac{f^{(k+1)}(x_1)}{(k+1)!} + \cdots$$
$$+ (x - x_1)^n \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}.$$

Es ist allgemein jede mehrfache Nullstelle von $f(x)$ auch Nullstelle von $f'(x)$. Wenn man es danach nur mit ganzen rationalen Funktionen zu tun haben will, die ausschließlich einfache Nullstellen besitzen, so kann man dies erreichen, indem man $f(x)$ durch den größten gemeinsamen Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$, das ist durch eine bestimmte ganze rationale Funktion dividiert. Doch auch auf diese Operation gehen wir hier nicht ein.

§ 14. Mehmkesche Methode.

Eine wesentlich andere Methode zur näherungsweisen und konstruktiven Angabe reeller Wurzeln algebraischer Gleichungen ist die von Mehmke[1]), die auf der Herstellung neuer, mit der gegebenen Gleichung in Zusammenhang stehender Bilder und wieder auf der Abmessung der Abszissen der Schnittpunkte gewisser Kurven beruht.

Zuerst bemerken wir: eine Gleichung

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

hat nur dann positive reelle Wurzeln, wenn unter den Koeffizienten positive und negative existieren, denn andernfalls wäre $f(x)$ für jeden positiven reellen Wert der Variablen von dem Zeichen der Koeffizienten. Auch soll uns hier allein die Bestimmung positiver Wurzeln beschäftigen, denn die der negativen kommt nach Einführung der Variablen $x' = -x$ auf die Bestimmung der positiven Wurzeln der Gleichung zurück:

$$(-1)^n f(-x') = 0,$$

wo der Faktor $(-1)^n$ nur beigefügt ist, damit der Koeffizient von x'^n wieder $+ a_0$ sei.

[1]) Zivilingenieur, Bd. 35, S. 617.

Führt man nun

$$\log x = \xi, \qquad \log y = \eta$$

ein, so wird in einer (ξ, η) Ebene das Bild der Kurve mit der Gleichung:

$$y = a x^n$$

die Gerade, deren Gleichung durch Logarithmierung der letzten hervorgeht:

$$\log y = n \log x + \log a$$

oder

$$\eta = n \xi \qquad + \log a.$$

Ist dann aber eine Gleichung vorgelegt

$$a_1 x^{n_1} - a_2 x^{n_2} = 0,$$

wo die Koeffizienten a_1, a_2 und die Exponenten positiv seien, so bilde man die „logarithmischen Bilder" beider Glieder, die die Gleichungen haben:

$$\eta = n_1 \xi + \log a_1, \qquad \eta = n_2 \xi + \log a_2$$

und suche deren Schnittpunkt. In diesem ist

$$\xi = \frac{\log a_1 - \log a_2}{n_2 - n_1} = \frac{1}{n_2 - n_1} \log \frac{a_1}{a_2} = \log \sqrt[n_2 - n_1]{\frac{a_1}{a_2}} = \log x.$$

Daher findet man in der Abszisse des Schnittpunktes der Bilder der Glieder den Logarithmus der zu suchenden Größe.

Hierzu mag gleich an dieser Stelle bemerkt werden, daß die Fehler der Zeichnung gegenüber denen der Werte des Logarithmus in fünfstelligen Tafeln, die wir ausschließlich benützen werden, groß sind.

Wird nun das logarithmische Bild der Kurve

$$y = a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2},$$

wo $n_2 > n_1 > 0$ und die Koeffizienten positiv seien, verlangt, so bilde man zunächst die logarithmischen Bilder der Glieder:

$$y = a_1 x^{n_1} = P_1, \quad y = a_2 x^{n_2} = P_2$$

und hierauf erst das von

$$y = P_1 + P_2.$$

Die η Achse, wo $\xi = 0$, $x = 1$ ist, schneidet das Bild der letzten Kurve in der Entfernung $\log(a_1 + a_2)$ vom Koordinatenanfangspunkte der (ξ, η) Ebene, d. i. in größerer Entfernung als die Bilder von P_1 und P_2.

Weil der Logarithmus mit dem Argumente wächst, wird auch allgemein die zu einem x und einem ξ gehörende Ordinate η der Kurve

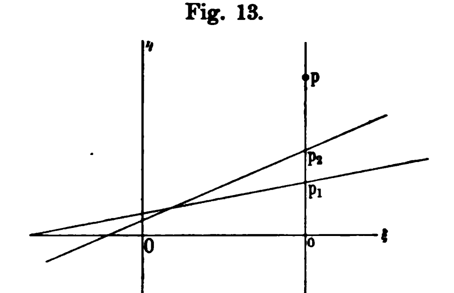
$$\eta = \log(P_1 + P_2)$$

größer als die bis zu den Geraden

$$\eta = n_i \xi + \log a_i \quad (i = 1,2)$$

führenden Ordinaten, d. h. mit anderen Worten, eine Parallele zur Ordinatenachse — sie heiße G — schneidet die ξ Achse, die

Fig. 13.



Bilder von P_1 und P_2 in Punkten o, p_1, p_2, aber die Kurve

$$\eta = \log(P_1 + P_2)$$

in einem solchen Punkte p, daß $\overline{op}$ größer als $\overline{op_1}$ und $\overline{op_2}$ ist (Fig. 13).

Man sieht ferner, daß

$$\overline{p_2 p} = \log(P_1 + P_2) - \log P_2 = \log\left(1 + \frac{1}{\frac{P_2}{P_1}}\right)$$

nur von $\frac{P_2}{P_1}$, oder wenn man so sagen will, nur von

$$\log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \overline{op_2} - \overline{op_1} = \overline{p_1 p_2}$$

abhängt. Setzt man also

$$\frac{P_2}{P_1} = z \quad \text{und} \quad \overline{p_1 p_2} = \log z,$$

so wird

$$\overline{p_2 p} = \log\left(1 + \frac{1}{z}\right).$$

Und die Kurve in einer (u, v) Ebene, für die die Parameterdarstellung gilt:

$$u = \log z, \quad v = \log\left(1 + \frac{1}{z}\right),$$

gibt daher in der Ordinate v des Punktes, der die Abszisse

$$u = \overline{op_2} - \overline{op_1}$$

hat, die Strecke $\overline{p_2 p}$, die man auf G über p_2 hinausgehen muß, um einen Punkt der Kurve

$$\eta = \log(P_1 + P_2)$$

zu erhalten.

Diese Hilfskurve heißt Additionskurve, weil sie denselben Zusammenhang zwischen den Koordinaten ihrer Punkte aufweist, den die bei der Berechnung des Logarithmus der Summe zweier Zahlen a und b, deren Logarithmen gegeben sind, also bei Berechnung von

$$\log(a + b) = \log a + \log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

vorkommenden Größen:

$$A = \log\left(1 + \frac{1}{\frac{a}{b}}\right) \quad \text{und} \quad D = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

in den Gaussschen Tafeln für die Additionslogarithmen besitzen, auf die wir noch zu sprechen kommen werden.

Aus den Gaussschen Tafeln entnimmt man die folgenden Werte:

u	v	u	v
$u =$ 0·00	$v =$ 0·301	$u =$ 0·70	$v =$ 0·079
0·10	0·253	0·80	0·063
0·20	0·212	0·90	0·051
0·30	0·176	1·00	0·041
0·40	0·145	2·00	0·004
0·50	0·110	3·00	0·000
0·60	0·097	4·00	0·000

und man kann den Kurventeil zeichnen, dem positive u Werte angehören.

Man beachte noch, daß dem Werte $u = \log z = \infty$ $v = 0$ zugehört, und es ist ersichtlich, daß die u Achse eine Asymptote der Additionskurve ist.

Eine zweite Asymptote ist die Gerade

$$v = -u,$$

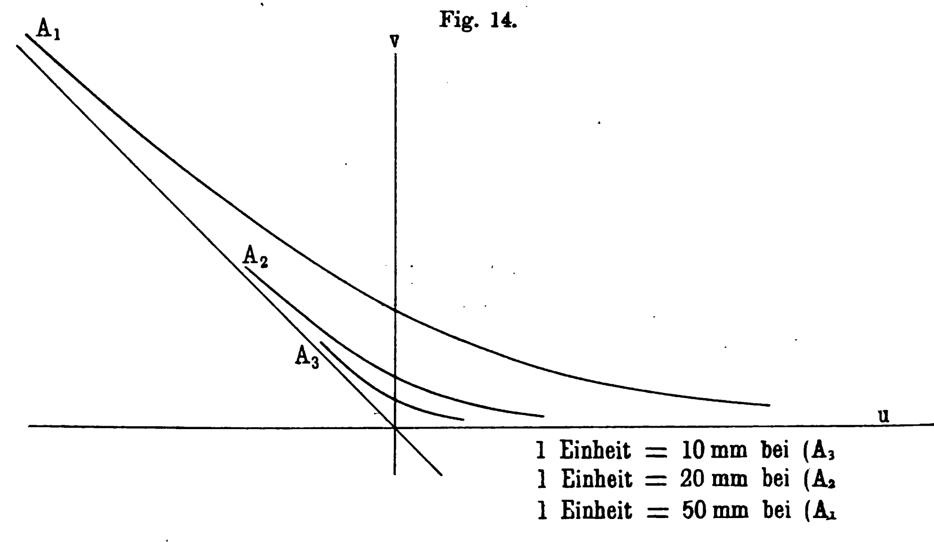
denn sucht man die dem Parameterwerte $z' = \frac{1}{z}$ zugehörenden Koordinaten u' und v' der Additionskurve, so ist:

$$u' = \log z' = \log \frac{1}{z} = -u,$$

$$v' = \log\left(1 + \frac{1}{z'}\right) = \log(1 + z) = \log z\left(1 + \frac{1}{z}\right) = u + v,$$

d. h. man findet die einer Abszisse $-u$ zukommende Ordinate, indem man $+u$ um die eben dieser Abszisse u zukommende Ordinate v vermehrt. Doch daraus folgt, daß die unter dem Winkel von 135° gegen die positive u Achse verlaufende Gerade durch den Punkt $\xi = 0$, $\eta = 0$ wirklich eine Asymptote der Additionskurve ist (Fig. 14).

Fig. 14.



Des Teiles der Additionskurve, der sich längs dieser Asymptote hinzieht, der also von der v Achse aus in der Richtung der negativen u liegt, bedarf man bei der Zeichnung des Teiles der Kurve $\eta = \log(P_1 + P_2)$, wo die Schnittpunkte einer Parallelen G zur η Achse mit der ξ Achse und mit den Bildern von P_1 und P_2, wir sagen die Punkte o, p_1 und p_2, so angeordnet sind, daß $\overline{op_2} - \overline{op_1} < 0$ ist.

Hierzu werde noch die Bemerkung angebracht, daß von zwei negativen Größen diejenige die größere heißt, die den kleineren Betrag besitzt, und daß eine positive Größe größer ist als jede negative.

Jetzt sind die Vorbereitungen zur Konstruktion der Kurve

$$\eta = \log(P_1 + P_2)$$

getroffen. Aber man hat, wie sich gleich zeigen wird, auch schon die Mittel, um das logarithmische Bild der Gleichung

$$y = a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \cdots + a_m x^{n_m}$$

herzustellen, wo die Koeffizienten a_μ wieder alle positiv und die positiven Exponenten steigend geordnet seien.

Bildet man nämlich die Bilder aller einzelnen Glieder:

$$P_\mu = a_\mu x^{n_\mu}$$

und bringt diese mit einer Geraden parallel zur η Achse zum Schnitte, die die ξ Achse in o, dann das Bild von P_1 in p_1 usw., schließlich das Bild von P_m in p_m schneidet, so hat der Schnittpunkt p dieser Geraden mit der Kurve

$$\eta = \log(P_1 + P_2 + \cdots + P_m)$$

eine größere Entfernung von der ξ Achse als der Punkt p_m.

Die η Achse insbesondere schneidet die Kurve in dem Punkte mit der Ordinate

$$\log(a_1 + a_2 + \cdots + a_m).$$

Um aber den Punkt p zu bestimmen, ermittle man mit Hilfe der Additionskurve zunächst den Schnittpunkt der Geraden G und der Kurve

$$\eta = \log(P_1 + P_2);$$

er heiße $p^{(1,2)}$. Dann bestimme man aus den Punkten p_3 und $p^{(1,2)}$ wieder mit Hilfe der Additionskurve den Schnittpunkt $p^{(1,2,3)}$ von G und der Kurve

$$\eta = \log[(P_1 + P_2) + P_3]$$

usw., wie das früher gelehrt wurde.

So ist ersichtlich, wie man den Punkt p findet, und wie man durch Wahl verschiedener Geraden G auch genügend Punkte zur näherungsweisen Angabe des logarithmischen Bildes der Gleichung

$$y = P_1 + P_2 + \cdots + P_m$$

ermittelt.

Wird die Gerade G in großer Entfernung vom Koordinatenanfangspunkte der (ξ, η) Ebene gewählt, so liegen die Punkte

$$p_1, p_2, \cdots p_m$$

weit voneinander und nach der Beschaffenheit der Additionskurve werden die Punkte

$$p^{(1,2)},\ p^{(1,2,3)} \text{ usw.}$$

nahe bei p_2 bzw. p_3 usw. liegen. Danach aber sieht man, daß das Bild von P_m eine Asymptote der zu zeichnenden Kurve wird.

Aus demselben Grunde wird das Bild von P_1 in seinem dem dritten Quadranten angehörenden Teile Asymptote, das will sagen, dort nähert sich die Kurve dem Bilde von P_1; aber bei dem Verlaufe unserer Kurve von der Asymptote P_1 zur Asymptote P kehrt sie ihre konkave Seite stets in der Richtung der wachsenden η, denn die Kurve hat nirgends einen Wendepunkt, weil, was leicht festzustellen wäre,

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d^2}{d\xi^2}\log(P_1 + P_2 + \cdots + P_m)$$

nicht verschwindet.

Faßt man nun die in dem früheren Gleichungspolynome $f(x)$ vorkommenden Glieder mit positiven Koeffizienten unter dem Zeichen $\varphi(x)$ und die Glieder mit negativen Koeffizienten unter dem Zeichen $-\psi(x)$ zusammen und soll man x Werte finden, für die

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

verschwindet, so suche man in der (ξ, η) Ebene die Kurven, deren Gleichungen beziehungsweise heißen:

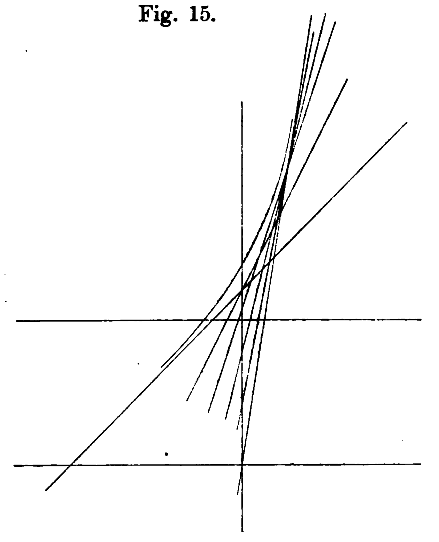


Fig. 15.

$\eta = \log\varphi(x)$, $\eta = \log\psi(x)$; deren Schnittpunkte haben dann Abszissen, die gleich sind den Logarithmen der zu suchenden x Werte.

Ein in der Zeichnung sehr einfaches Beispiel ist das folgende:

$$x^6 + 10x^5 + 100x^4 + 500x^3 + 1000x^2 + 1000x = 300,$$

bei dem charakteristisch ist, daß $a_\mu \leqq a_{\mu+1}$ gilt und

$$\psi(x) = \text{Konst.} = 300$$

ist. Die Bilder der Glieder zeigen die in der Fig. 15 ersichtliche Anordnung und man findet aus der Zeichnung die Abszisse eines einzigen Schnittpunktes, nämlich

$$\xi = -0{\cdot}61,$$

worauf näherungsweise

$$x = 0{\cdot}244$$

wird.

Also die gegebene Gleichung hat nur eine positive reelle Wurzel und hierauf muß sie eine ungerade Anzahl negativer reeller Wurzeln haben, weil — wie man sieht — das Produkt der sechs Wurzeln gleich — 300 ist.

Bei vielen Aufgaben haben die den Gleichungen

$$y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = \psi(x)$$

zugehörenden logarithmischen Bilder eine solche Gestalt, daß es nicht möglich ist, die Abszissen der Schnittpunkte ohne größere Ungenauigkeiten abzulesen, wie z. B. wenn man die positiven Wurzeln der Gleichung

$$x^6 - 10x^5 + 100x^4 - 500x^3 + 1000x^2 - 1000x = 300$$

aufsucht und man sich des Maßstabes bedient, dessen Einheit gleich 10 mm ist.

Da kann es einerseits von Vorteil sein, statt der Gleichung $\varphi(x) - \psi(x) = 0$ eine Gleichung

$$\frac{\varphi(x) - \psi(x)}{x^k} = 0$$

zu betrachten, wo k eine ganze Zahl bedeutet.

Doch weil nach dieser Operation in der (ξ, η) Ebene Gerade vorkommen, die anders als bisher gegen die ξ Achse unter spitzem oder unter stumpfem Winkel geneigt sind, so mag hier noch die allgemeine Bemerkung Platz haben, daß man die Entfernung zweier Punkte p_1, p_2 auf zweien solcher Geraden und einer Parallelen G zur Ordinatenachse positiv oder negativ zu zählen hat, jenachdem p_2 eine größere oder kleinere Entfernung von der ξ Achse zukommt als p_1, und daß danach die Strecke $\overline{p_1 p_2}$ als eine positive oder negative Abszisse eines Punktes der Additionskurve zu betrachten ist, und die zugehörige Ordinate v, kleiner oder größer als log 2, von dem Punkte p_2 aus in der Richtung der positiven η aufzutragen ist, damit man den Träger von p auf G erhalte.

Die Methode von Mehmke erfordert also auch hier einfache Zeichnungen, doch ist natürlich zu beachten, daß bei der Herstellung der logarithmischen Bilder der Glieder in den Gleichungen derselbe Maßstab anzuwenden ist, der in der Additionskurve zu-

grunde gelegt wurde; damit die Figuren nicht zu groß ausfallen, wurden in Fig. 14 in dreierlei Maßstäben Additionskurven gezeichnet.

Andererseits geht man darauf aus, die logarithmischen Bilder solcher Gleichungen

$$y = a_1 x^{n_1} + \cdots + a_m x^{n_m}$$

herzustellen, in denen auch negative Koeffizienten a_μ vorkommen.

Um das in dem einfachsten Falle

$$y = a_1 x^{n_1} - a_2 x^{n_2}$$

zu tun, wo nun in

$$P_1 = a_1 x^{n_1} \quad \text{und} \quad P_2 = a_2 x^{n_2}$$

die Koeffizienten positiv seien, und $n_1 \neq n_2$ gelte, bemerke man wieder, daß eine Parallele G zur η Achse, die die ξ Achse und die Bilder von P_1 und P_2 in Punkten o, p_1, p_2 in eben dieser Anordnung schneidet, das Bild von

$$y = P_1 - P_2$$

in einem Punkte p solcher Art erreicht, daß

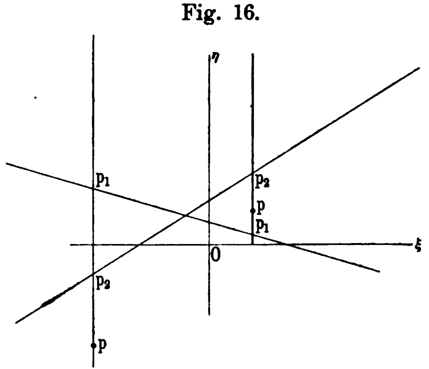
$$\overline{op} = \log(P_1 - P_2)$$

gilt. Doch weil bei der logarithmischen Addition aus den Punkten p und p_2 wieder p_1 hervorgehen muß, also die Punkte p und p_1 von früher ihre Rollen vertauschen, so sind

$$\overline{p_1 p_2} \quad \text{und} \quad \overline{p_2 p}$$

bzw. Ordinate und Abszisse eines Punktes der Additionskurve; daher gelangt man (Fig. 16) zum Punkte p, indem man zu $\overline{p_1 p_2}$

Fig. 16.



als Ordinate eines Punktes der Additionskurve die Abszisse sucht und diese von p_2 in der Richtung der negativen oder positiven η

aufträgt, je nachdem die Abszisse des Punktes der Additionskurve größer oder kleiner als null ist. Hierzu ist noch zu bemerken, daß die Bilder von

$$y = P_1 \quad \text{und} \quad y = P_2$$

wieder Asymptoten des Bildes von

$$y = P_1 - P_2$$

werden.

So kann man weiter gehen. —

Wenn man nun aber wieder auf eine Gleichung

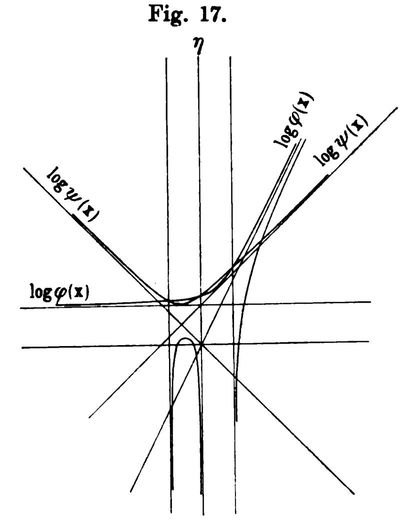
$$y = f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nur positive Koeffizienten besitzen, die erste Vorschrift zur Zeichnung der Bilder von

$$y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = \psi(x)$$

anwendet, so ist noch zu bemerken, daß jede durch einen Schnittpunkt der letztgenannten Bilder zur η Achse gelegte Parallele eine Asymptote der Kurve $\log y = \log f(x)$ ist, weil dort $\log y = -\infty$ wird, und man kann sagen, daß man nur die Abstände dieser Asymptoten von der η Achse abzulesen habe, wenn man die reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ haben will.

Fig. 17.



Als einfaches Beispiel sei das folgende ausgeführt:

$$x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Man bilde

$$\varphi(x) = x^2 + 5,$$

$$\psi(x) = 5x + \frac{1}{x},$$

stelle die Zeichnung her und lese ab (Fig. 17)

$$\xi = 0, \quad 0{\cdot}574, \quad -0{\cdot}585;$$

die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind also näherungsweise

$$x = 1, \qquad 3{\cdot}73, \qquad 0{\cdot}26.$$

§ 15. Konstruktive Bestimmung der Lösungen eines Systems von Gleichungen.

Sind zunächst zwei lineare Gleichungen:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2$$

mit reellen Koeffizienten gegeben, so wird man eine konstruktive Lösung dadurch bewerkstelligen, daß man x_1 und x_2 etwa als rechtwinkelige Koordinaten deutet, die Gleichungen als die von Geraden ansieht, diese zeichnet und die Koordinaten des Schnittpunktes abliest, der im Endlichen liegt, wenn die Determinante $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ nicht verschwindet.

Im Falle dreier linearer Gleichungen mit reellen Koeffizienten in drei Unbekannten hätte man ebenso die Koordinaten des Schnittpunktes dreier Ebenen festzustellen. Doch wir gehen hier auf diese Behandlungsweise der Aufgabe nicht ein, weil wir gleich die Lösung eines Systems von n linearen Gleichungen in n Unbekannten und mit reellen Koeffizienten in wesentlich anderer Art beschreiben wollen[1]).

Sind die n linearen Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - c_1 &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - c_2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n - c_n &= 0, \end{aligned}$$

so kann man jeder in folgender Weise ein Bild zuordnen: Man wähle auf n etwa parallelen Geraden G_ν ($\nu = 1, 2, \ldots n$) willkürlich je einen Nullpunkt und trage von diesen ab in gleichem Sinne auf ihnen Strecken auf, deren Endpunkte Träger der Werte der Koeffizienten der abzubildenden Gleichungen seien. Dann werden die Geraden G_ν mit ihren Nullpunkten und den den $n + 1$ Koeffizienten zukommenden Stellen Bilder der Gleichungen, und umgekehrt wird man von je einem solchen Bilde zu einer einzigen Gleichung gelangen.

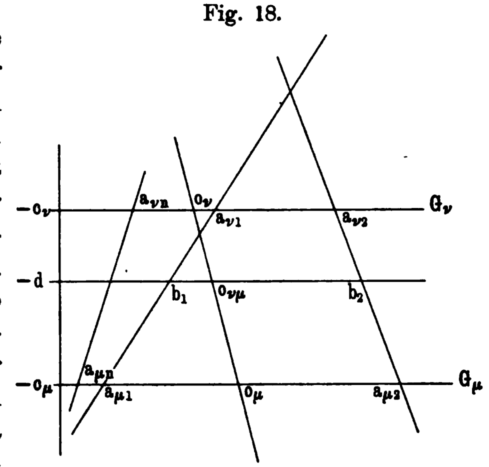
Stellt man in dieser Weise auf n parallelen Geraden, auf denen, nochmals gesagt, die Nullpunkte willkürlich zu wählen sind, Bilder der n linearen Gleichungen her, so handelt es sich nunmehr um die Bilder der Eliminationsgleichungen.

---

[1]) Van den Berg, Amst. Akad. Versl. on Meded. [3] 4, p. 204, 1887. Vereinfachung von Mehmke, Moskauer math. Samml. 16, p. 342, 1892.

Es seien in der nachstehenden Figur 18 O_ν und O_μ die Nullpunkte auf zweien der parallelen Geraden und die Punkte $a_{\nu 1}$, $a_{\nu 2}, \ldots a_{\nu n}$ und $-c_\nu$ bzw. $a_{\mu 1}, a_{\mu 2}, \ldots a_{\mu n}, -c_\mu$ die Träger der Werte der Koeffizienten der νten und μten der gegebenen Gleichungen. Verbindet man die Träger der Koeffizienten bei gleichnamigen Unbekannten und auch O_ν und O_μ, so werden diese Verbindungslinien von einer neuen Parallelen zu den gegebenen Geraden G_ν und G_μ in solchen Punkten $b_1, b_2, \ldots b_n$, $-d$ und $O_{\nu,\mu}$ geschnitten, daß $b_1, b_2, \ldots b_n$ und $-d$ gegenüber $O_{\nu,\mu}$ stets dieselbe Verknüpfungsweise entsprechender a auf den gegebenen Geraden aufweisen.

Fig. 18.



In der Tat dem Punkte b_1 kommt gegenüber den Punkten $a_{\nu 1}$ und $a_{\mu 1}$ auf deren Verbindungslinie ein bestimmtes Teilungsverhältnis zu

$$\frac{a_{\nu 1} b_1}{a_{\mu 1} b_1},$$

dem Punkte b_2 gegenüber $a_{\nu 2}$ und $a_{\mu 2}$ ebenso das Teilungsverhältnis

$$\frac{a_{\nu 2} b_2}{a_{\mu 2} b_2}$$

und diese Teilungsverhältnisse sind einander gleich, wie die Betrachtung der durch die Geraden $\overline{a_{\nu 1} a_{\mu 1}}$, $\overline{a_{\nu 2} a_{\mu 2}}$, und die Geraden G_ν, G_μ und die durch die neue Parallele begrenzten Dreiecke zeigt.

Dasselbe gilt auch von dem Teilungsverhältnis des Schnittpunktes der neuen Parallelen mit der Verbindungslinie irgend zweier Punkte, die einander entsprechenden Koeffizienten in der νten und μten Gleichung zugehören.

Legen wir nun durch den Schnittpunkt der Verbindungslinien von O_ν und O_μ und $a_{\nu 1}$ und $a_{\mu 1}$ eine Parallele zu den Geraden G_ν und G_μ, so wird der x_1 beizuordnende Koeffizient in der

Gleichung, die ihr Bild in der letztgenannten Geraden haben soll, Null.

In dieser Weise vermag man aus den Bildern der n gegebenen Gleichungen die Bilder von $n - 1$ Gleichungen herzustellen, die x_1 nicht enthalten, und aus diesen wieder die Bilder der $n - 2$ Gleichungen, die weder x_1 noch x_2 enthalten usw. Schließlich wird man das Bild einer Eliminationsgleichung in einer Variablen herstellen und aus diesem den Wert der Variablen mittels eines Verhältnisses von Strecken ablesen.

So gehe man betreffs jeder Unbekannten vor.

Besteht das System von Gleichungen aus zwei nichtlinearen mit zwei Unbekannten x und y:

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0,$$

so ordne man den Gleichungen zwei Kurven C_1 und C_2 zu, zeichne diese näherungsweise nach Angabe einer endlichen Anzahl ihrer Punkte und lese die Koordinaten der Schnittpunkte der Kurven ab.

Im Falle dreier nichtlinearer Gleichungen in drei Variablen

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0, \qquad h(x, y, z) = 0$$

sind die Koordinaten der Schnittpunkte der Durchdringungskurven je zweier der den gegebenen Gleichungen zuzuordnenden Flächen aufzusuchen.

Aber im Falle eines Systems von n Gleichungen in n Unbekannten, von denen mindestens eine von höherem Grade als dem ersten ist, kann man in dem bloß dreidimensionalen Raume eine entsprechende geometrische Aufgabe mit den Gleichungen nicht mehr verbinden. Wir lassen es uns danach genügen, Systeme von zwei und drei Gleichungen in zwei bzw. drei Variablen soweit behandelt zu haben, daß ersichtlich wurde, wie man die diesen Gleichungen gleichzeitig genügenden, reellen Wertesysteme näherungsweise konstruktiv ermitteln könne.

§ 16. Rechnerische Bestimmung der Lösungen einer algebraischen Gleichung.

Eine algebraische Gleichung $n$ten Grades

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

hat bekanntlich n Wurzeln, oder man sagt, eine ganze rationale Funktion $f(x)$ hat so viel Nullstellen, als ihr Grad anzeigt.

Sind die Koeffizienten a_ν reell, so sind die Nullstellen reell oder komplex oder teils reell und teils komplex. Besteht aber eine komplexe Nullstelle $p + iq$, so wird

$$f(p + iq) = P(p, q) + i\,Q(p, q) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

dadurch null, daß P und Q verschwinden. Dann aber wird auch

$$f(p - iq) = P(p, q) - i\,Q(p, q)$$

null. Daher treten komplexe Nullstellen bei einer ganzen rationalen Funktion mit reellen Koeffizienten paarweise auf, und zwar sind die Werte je eines Paares komplexer Nullstellen konjugiert komplex.

Nach einer früheren Bemerkung (§ 13) kann man voraussetzen, daß alle Nullstellen von $f(x)$ einfache seien, daß also keine auch Nullstelle von $f'(x)$ sei, und das wollen wir nunmehr tun.

Die Beträge der also einfachen Nullstellen sind aber kleiner als $1 + \alpha$, wenn α den größten der Beträge bedeutet:

$$\left|\frac{a_\nu}{a_0}\right| \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n).$$

Bei dem Beweise der Behauptung, daß somit $1 + \alpha$ auch eine obere Grenze der reellen Wurzeln von $f(x) = 0$ sei, können wir uns auf den Fall der positiven Wurzeln beschränken. Denn die Ermittelung der reellen, aber negativen Wurzeln kam auf die der positiven Wurzeln der Gleichung

$$(-1)^n f(-x) = 0$$

zurück, und komplexe Nullstellen bieten hier kein Interesse dar.

Wir wollen nun auch a_0 als positiv annehmen, denn wenn das nicht der Fall wäre, so wäre $-f(x) = 0$ eine Gleichung der verlangten Art. Weiter müssen in $f(x)$, wenn es überhaupt positive Werte geben soll, die $f(x)$ zu null machen, positive und negative Koeffizienten vorhanden sein. Es sei gleich $a_1 < 0$, und es sei β der größte Wert unter den Beträgen der Koeffizienten

$$a_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Dann kann man wegen der Identität

$$\beta(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) - \beta\,\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$$

$$f(x) = a_0 \frac{x^n}{x-1}\left[(x-1) - \frac{\beta}{a_0}\right] + \frac{\beta}{x-1} + (\beta + a_1)\,x^{n-1} + \cdots + (\beta + a_{n-1})\,x + (\beta + a_n)$$

setzen und sieht, daß $f(x)$ für einen positiven x Wert größer als eins gewiß positiv ausfällt, wenn für diesen

$$x - 1 - \frac{\beta}{a_0} > 0$$

wird. Bezeichnet man nun $\frac{\beta}{a_0}$ mit α, so kann man sagen, daß jede positive Nullstelle der Funktion $f(x)$ mit reellen Koeffizienten kleiner sein muß als $1 + \alpha$, denn sie nimmt für jeden Wert größer als $1 + \alpha$ oder gleich $1 + \alpha$ einen positiven Wert an.

Ebenso groß wird aber auch die obere Grenze der positiven Wurzeln der Gleichung

$$(-1)^n f(-x) = 0,$$

d. h. die der negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung und man hat daher in dem Intervalle von $-(1+\alpha)$ bis $+(1+\alpha)$ ein endliches Intervall, in dem allein die etwaigen reellen Nullstellen von $f(x)$ liegen müssen.

Hier mag noch angegeben sein, daß man eine untere Grenze der positiven reellen Wurzeln von $f(x) = 0$ findet, indem man die obere Grenze der positiven Wurzeln der Gleichung

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

aufsucht und den reziproken Wert dieser nimmt.

Die neue Gleichung wurde dadurch gebildet, daß man $x = \frac{1}{z}$ setzte und die Nenner fortschaffte.

Z. B. ist die obere Grenze der positiven reellen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 2 = 0$$

3 und die untere Grenze der positiven Wurzeln $\frac{1}{2}$, denn die obere Grenze der positiven Wurzeln der Gleichung

$$2z^3 - 2z^2 - 2z + 1 = 0$$

ist gleich 2.

Haben wir aber so ein Intervall angeben gelernt, in dem allein die etwaigen reellen Nullstellen liegen können, so wollen

wir hier ohne die Entscheidung, ob solche Nullstellen und wie viele wirklich existieren, der Einfachheit halber in $1 + \alpha = \alpha_1$ einen Näherungswert der Nullstelle als gegeben ansehen. Ob α_1 wirklich als Näherungswert einer reellen Nullstelle gelten kann, mag an dieser Stelle der Satz entscheiden: Wenn α_2 ein reeller, α_1 benachbarter Wert ist, so existiert zwischen α_1 und α_2 mindestens eine Nullstelle, sobald $f(\alpha_1)$ und $f(\alpha_2)$ von verschiedenem Zeichen sind.

Doch kann man hier nicht folgern, es gebe zwischen α_1 und α_2 keine Nullstelle, wenn $f(\alpha_1)$ und $f(\alpha_2)$ von gleichen Zeichen sind.

Das Gesagte gilt, weil $f(x)$ als stetige Funktion an jeder Nullstelle sein Zeichen wechselt, denn es muß dann in einem Intervalle von α_1 bis α_2, wenn

$$\operatorname{sgn} f(\alpha_1) \neq \operatorname{sgn} f(\alpha_2) \quad (\operatorname{sgn} = \text{signum}^{1)})$$

ist, eine ungerade Anzahl von Nullstellen vorkommen.

In dem früheren Beispiele, wo

$$f(x) \equiv x^3 - 2x^2 - 2x + 2$$

war, ist $\alpha = 2$ und man findet

$$f(-3) < 0, \quad f(-2) < 0, \quad f(-1) > 0,$$
$$f(0) > 0, \quad f(1) < 0, \quad f(2) < 0, \quad f(3) > 0,$$

und man ersieht, daß in den Intervallen von -2 bis -1, von 0 bis $+1$, von 2 bis 3 je eine reelle Nullstelle vorhanden sein müsse.

Die Funktion $x^2 + x + 1$ zeigt von $x = -2$ bis $x = 2$ keinen Wechsel des Zeichens, hat aber auch keine reelle Nullstelle.

Jetzt muß es unsere Aufgabe sein, von einem einer reellen Nullstelle x' benachbarten Werte α_1 zu einer x' näher benachbarten Stelle überzugehen.

Es sei $x' = \alpha_1 + h_1$, dann gilt

$$f(x') = f(\alpha_1) + \frac{f'(\alpha_1)}{1!} h_1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha_1)}{n!} h_1^n.$$

Indem man aber hier die Glieder vernachlässigt, die höhere Potenzen von h_1 enthalten, weil diese gegen h_1 als klein anzusehen sind, so wird statt der Gleichung $f(x) = 0$ als noch zu

[1]) Signum, d. h. das Zeichen.

lösende die folgende gelten

$$f(\alpha_1) + \frac{f'(\alpha_1)}{1!} h_1 = 0,$$

und man findet in

$$\alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$$

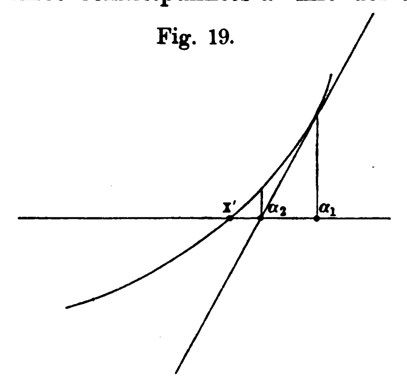
einen der Nullstelle x' näher liegenden Wert α_2. Allerdings überzeugen wir uns hier nur durch eine geometrische Betrachtung davon, daß

$$| x' - \alpha_2 | < | x' - \alpha_1 |$$

ist.

Verfolgen wir die Kurve $y = f(x)$ in der Nachbarschaft eines Schnittpunktes x' mit der x Achse, und ist α_1 die Abszisse eines Nachbarpunktes von x', legen wir ferner in dem Kurvenpunkte $[\alpha_1, f(\alpha_1)]$ die Tangente, bringen diese mit der x Achse in α_2 zum Schnitte, so ist, wie die Figur 19 zeigt,

Fig. 19.



$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)},$$

weil der Tangens des Neigungswinkels der verzeichneten Tangente gegenüber der positiven Richtung der x Achse den Wert $f'(\alpha_1)$ besitzt; und die Stelle α_2 liegt x' näher als α_1.

Geht man von der Stelle α_2 in gleicher Weise zu einer Stelle α_3, so kommt man x' augenscheinlich wieder näher usw. Analytisch, d. h. in rechnerischer Beziehung ist hiermit behauptet, die Funktion

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

besitze die Eigenschaft, daß $F(\alpha_1) = \alpha_2$ der Stelle x' näher liege als α_1, daß

$$F(\alpha_2) = F[F(\alpha_1)] = F_2(\alpha_1) = \alpha_3$$

x' näher liege als α_2, und daß

$$\lim_{\nu = \infty} F_\nu(\alpha_1) = x'$$

werde. Das ist auch der Fall[1]).

[1]) Schröder, Mathematische Annalen, Bd. 2.

Weiß man ein Intervall von α_1 bis β_1, in dem eine Nullstelle x' liegt, so kann man also von α_1, sowie von β_1 näher an die Nullstelle x' herantreten über Stellen α_2 bzw. β_2, dann über α_3 bzw. β_3 usw.

Doch ist es wichtig, feststellen zu können, ob die einzelnen dieser Stellen links oder rechts von x' liegen, also kleiner oder größer als x' sind.

Bemerkt man, daß

$$F'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{f'^2(x)}$$

von dem Zeichen des Zählers ist, so sieht man unter der Voraussetzung, daß $f''(x)$ in dem Intervalle von α_1 bis β_1 sein Zeichen nicht wechsle, daß $F(x)$ an der Stelle x zunimmt, wenn

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f''(x)$$

ist, aber im gegenteiligen Falle abnimmt, indem eine Funktion an einer Stelle zu- oder abnimmt, je nachdem dort ihre erste Ableitung größer oder kleiner ist als null. Daher wird $F(x)$ von α_1 bis x' wachsen und dann bis β_1 abnehmen, wenn

$$\operatorname{sgn} f(\alpha_1) = \operatorname{sgn} f''(\alpha_1)$$

gilt, und $F(x)$ wird von α_1 bis x' abnehmen und dann bis β_1 wachsen, wenn

$$\operatorname{sgn} f(\alpha_1) \neq \operatorname{sgn} f''(\alpha_1)$$

gilt, denn die Funktion $f(x)$ wechselt in x' ihr Zeichen.

Nach dem Gesagten wird die Stelle x' für die Funktion $F(x)$ eine Maximal- oder Minimalstelle sein und es wird gelten:

$$F(\alpha_1) < x' \quad \text{und} \quad F(\beta_1) < x',$$

oder:

$$F(\alpha_1) > x' \quad \text{und} \quad F(\beta_1) > x'.$$

Unter der gemachten Voraussetzung über $f''(x)$ ist daher bei gleichen Zeichen von $f(\alpha_1)$ und $f''(\alpha_1)$

$$\alpha_2 < x',$$

aber bei entgegengesetzten Zeichen von $f(\alpha_1)$ und $f''(\alpha_1)$

$$\alpha_2 > x'.$$

Im Falle

$$f(x) = x^4 + 12x^3 + 45x^2 + 72x + 40$$

besteht eine Nullstelle x' zwischen $-1{\cdot}2$ und $-1{\cdot}1$, und

$$f''(x) = 12x^2 + 72x + 90 = 12(x^2 + 6x + 7{\cdot}5)$$

wechselt in diesem Intervalle sein Zeichen nicht.

Ferner ist $f(x)$ an der Stelle $-1{\cdot}2$ gleich $-0{\cdot}2624$,

$$f'(-1{\cdot}2) = 8{\cdot}928, \quad f''(-1{\cdot}2) = 20{\cdot}88,$$

und es wird

$$\alpha_2 = -1{\cdot}2 + 0{\cdot}0292 = -1{\cdot}1708 > x'.$$

Ferner wird

$$f(-1{\cdot}17) = -0{\cdot}015\,031\,21, \quad f'(-1{\cdot}17) = -9{\cdot}573\,948,$$
$$f''(-1{\cdot}17) > 0$$

und somit

$$\alpha_3 = -1{\cdot}171\,57 > x';$$

und so fortgehend findet man

$$x' = -1{\cdot}171\,5728 \cdots.$$

Die hier behandelte Newtonsche Methode zur Aufsuchung reeller Nullstellen aus Näherungswerten hat durch Horner die folgende systematische Behandlungsweise erfahren[1]).

Soll

$$x' = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots$$

berechnet werden, und weiß man etwa, daß x' zwischen den Größen

$$\alpha_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} \quad \text{und} \quad \alpha_1 + \frac{1}{10} = a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}$$

liegt, so besitzt die durch die Substitution

$$x = z_1 + \alpha_1$$

transformierte Gleichung

$$f(z_1 + \alpha_1) = f(\alpha_1) + \frac{f'(\alpha_1)}{1!} z_1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha_1)}{n!} z_1^n = 0$$

eine Wurzel

$$z_1' = \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots,$$

die dem Betrage nach kleiner ist als $\frac{1}{10}$.

Einen Näherungswert für z_1' erhält man dadurch, daß man aus der Gleichung

$$f(\alpha_1) + \frac{f'(\alpha_1)}{1!} z_1 = 0$$

---

[1]) Vgl. Biermann, l. c. (s. S. 44), S. 256.

z_1 bis auf ein Hundertstel genau berechnet. Dann werde z_1, abgesehen von den Tausendsteln, Zehntausendsteln usw. gleich

$$\frac{a_2'}{10^2}.$$

Bildet man dann aus $f(x) = 0$ eine Gleichung, deren Wurzeln um

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2'}{10^2} = \alpha_2$$

kleiner sind:

$$f(\alpha_2) + \frac{f'(\alpha_2)}{1!} z_2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha_2)}{n!} z_2^n = 0$$

oder aus der Gleichung

$$f(z + \alpha_1) = 0$$

eine neue, deren Wurzeln um $\frac{a_2'}{10^2}$ kleiner sind, so hat die entstehende Gleichung eine Wurzel, die nur aus Hundertsteln, Tausendsteln usw. zusammengesetzt ist. Entnimmt man aus

$$f(\alpha_2) + \frac{f'(\alpha_2)}{1!} z_2 = 0$$

den auf Tausendstel berechneten Wert der Unbekannten, er heiße

$$z_2 = \frac{a_2'}{10^2} + \frac{a_3'}{10^3},$$

dann weiß man auch von der Wurzel x' die Hundertstel

$$\frac{a_2}{10^2} = \frac{a_2' + a_2''}{10^2}$$

und hat in

$$\frac{a_3'}{10^3}$$

nicht zu viele Tausendstel.

Nennt man

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3'}{10^3} = \alpha_3,$$

so wird man nun zu einer Gleichung etwa in der Variablen z_3 gehen, die eine Wurzel nur aus Tausendsteln, Zehntausendsteln usw. zusammengesetzt besitzt. Daher rechne man

$$-\frac{f(\alpha_3)}{f'(\alpha_3)}$$

nur auf Tausendstel und Zehntausendstel und man erhält in

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4'}{10^4}$$

die Wurzel x' bis auf die dritte Dezimalstelle genau usw.

In dem früheren Beispiele ist $\alpha_1 = -1{\cdot}1$,

$$f(z_1 + \alpha_1) = z_1^4 + 7{\cdot}6\,z_1^3 + 12{\cdot}66\,z_1^2 + 11{\cdot}236\,z_1 + 0{\cdot}7421,$$

also

$$a_2' = -6.$$

Hierauf wird $\alpha_2 = -1{\cdot}16$ und die Gleichung in z_2 heißt:

$$z_2^4 + 7{\cdot}36\,z_2^3 + 11{\cdot}4136\,z_2^2 + 9{\cdot}792016\,z_2 + 0{\cdot}11198736 = 0;$$

und nunmehr ist

$$a_2'' = -1, \qquad a_3' = -1,$$

also näherungsweise

$$x' = -1{\cdot}171 \text{ usw.}$$

§ 17. Verallgemeinerung der Newtonschen Näherungsmethode.

Nun soll gezeigt werden, wie man von einem zwei algebraischen Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0$$

nur näherungsweise genügenden Wertesysteme näher an ein Lösungensystem gelangen kann. In dem § 15 wurde schon gesagt, wie man vorgehen solle, um ein reelles Lösungensystem in erster Annäherung durch Konstruktion zu finden. Hier setzen wir kurz auseinander, daß diese Lösungen nur in einem endlichen, angebbaren Bereiche liegen, und geben auch an, wie man nahe an eine Lösung hinankommen könne.

Die x Werte, die in Verbindung mit passenden y Werten beiden Gleichungen genügen, sind Nullstellen der sogenannten Eliminante in x, d. i. einer ganzen rationalen Funktion $F_1(x)$, deren Grad gleichkommt dem Produkte der Gradzahlen von $f(x, y)$ und $g(x, y)$; und die y Werte der gemeinsamen Lösungen sind Nullstellen der Eliminante in y, d. i. einer ganzen rationalen Funktion $F_2(y)$ von gleichem Grade wie $F_1(x)$. Die Bildungsweise dieser Eliminanten, deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen der Koeffizienten von f und g sind, behandeln wir

hier nicht, doch indem wir sie aufnehmen, ersehen wir, daß die reellen Nullstellen (x', y') von $f = 0$ und $g = 0$ — wie wir einfach sagen wollen — in einem endlichen Bereiche einer (x, y) Ebene aufzusuchen seien.

In der Tat, wenn die Koeffizienten von f und g reell sind, was wir voraussetzen wollen, so gibt es im allgemeinen auch eine endliche reelle obere Grenze für die reellen Nullstellen von $F_1(x)$ und im allgemeinen auch eine solche für die reellen Nullstellen von $F_2(y)$. Heißt aber der größere Wert dieser oberen Grenzen r, so wird jede reelle Lösung in dem Bereiche zu finden sein, wo der Betrag von x kleiner als r und der Betrag von y kleiner als r ist, d. h. man kann einen endlichen Bereich angeben, in dem die reellen Lösungen beider Gleichungen vorkommen werden.

Wenn man dann die Gleichungen

$$z - f(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad z - g(x, y) = 0$$

in Betracht zieht und diese Gleichungen als die zweier Flächen in den Koordinaten x, y, z ansieht, so wird eine Lösung (x', y') der Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ als Koordinatenpaar eines Durchschnittspunktes der Schnittlinie der Flächen mit der (x, y) Ebene aufzufassen sein. Aber die Schnittlinie der beiden Flächen beurteile man dadurch, daß man ihre Schnitte mit verschiedenen Ebenen $x = a$ erwägt. Für die Schnittpunkte einer solchen Ebene und der Schnittkurve beider Flächen bestehen nämlich die Gleichungen

$$z = f(a, y) \quad \text{und} \quad z = g(a, y)$$

und darum ist das $x = a$ zugehörende y, es heiße y_a, aus einer Gleichung in einer Veränderlichen zu entnehmen

$$f(a, y_a) - g(a, y_a) = 0$$

und dann hat man:

$$z = g(a, y_a).$$

Auf diesem Wege kann man also Punkte $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ der Schnittlinie beider Flächen auch nahe der (x, y) Ebene, wo $z = 0$ ist, oder doch einen Punkt nahe einem der erstgenannten auffinden, und von solch einem Punkte gehe man entsprechend wie bei dem Newtonschen Verfahren vor, um weitere Wertepaare zu finden, die einer Lösung (x', y') des ursprünglichen Gleichungensystemes näher liegen [1]).

---

[1]) Biermann, Monatsh. f. Math. u. Physik, Jahrg. XI.

Wenn man in einem Punkte $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ der Schnittlinie der Flächen die Tangentialebenen herstellt und zum Schnitte bringt, d. h. die Gleichungen zusammenbestehen läßt:

$$\zeta - f(\alpha_1, \beta_1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(\alpha_1, \beta_1)} (\xi - \alpha_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(\alpha_1, \beta_1)} (\eta - \beta_1),$$

$$\zeta - g(\alpha_1, \beta_1) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(\alpha_1, \beta_1)} (\xi - \alpha_1) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{(\alpha_1, \beta_1)} (\eta - \beta_1),$$

so schneidet die Schnittlinie dieser beiden Ebenen die (x, y) Ebene in dem Punkte $(x, y) = (\alpha_2, \beta_2)$, wo

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \left(\frac{f(x, y)\,\frac{\partial g}{\partial y} - g(x, y)\,\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}}\right)_{(\alpha_1, \beta_1)},$$

$$\beta_2 = \beta_1 - \left(\frac{g(x, y)\,\frac{\partial f}{\partial x} - f(x, y)\,\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}}\right)_{(\alpha_1, \beta_1)}$$

ist, und von diesen Werten kann man zeigen, daß sie die Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ genauer erfüllen als α_1, β_1.

Von der Stelle (α_2, β_2) gehe man in gleicher Weise zu Werten α_3, β_3, indem man in den früheren Ausdrücken α_1, β_1 durch α_2, β_2 ersetzt usw. Die Grenzen der durch Wiederholung gebildeten Größenreihen sind dann x' und y'. Man kann also das Newtonsche Näherungsverfahren auch zur näherungsweisen Bestimmung der Lösungen zweier Gleichungen anwenden; doch ging man hier von einem Punkte der Schnittlinie der beiden Flächen aus. Dasselbe Verfahren ist aber auch anwendbar, wenn die Stelle $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ nur nahe der Durchdringungskurve der Flächen liegt und die früheren Gleichungen in $\xi - \alpha_1$ und $\eta - \beta_1$ nur nahezu erfüllt sind; oder wenn man die Tangentialebenen in zwei nahe der Schnittlinie liegenden Punkten der Flächen zum Schnitte bringt, von denen dieselben Lote auf die (x, y) Ebene zu fällen sind.

Ferner läßt sich ebenso der von Horner vorgeschriebene Rechnungsvorgang auch hier einhalten, indem man aus den gegebenen Gleichungen solche bildet, die um α_1, bezüglich um β_1 verminderte Lösungen haben, und man die Summen der Glieder

nullter und erster Dimension der Taylorschen Entwickelungen von $f(x, y)$ und $g(x, y)$ in der Umgebung von (α_1, β_1) für sich zum Verschwinden bringt:

$$f(\alpha_1, \beta_1) + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(\alpha_1, \beta_1)} (\xi - \alpha_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(\alpha, \beta_1)} (\eta - \beta_1)\right] = 0,$$

$$g(\alpha_1, \beta_1) + \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(\alpha_1, \beta_1)} (\xi - \alpha_1) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{(\alpha_1, \beta_1)} (\eta - \beta_1)\right] = 0,$$

dann aber die ξ und η Werte nur wieder auf einen gewissen Bruchteil der Einheit berechnet usw.

Die entsprechende Aufgabe für ein System von mehr als zwei algebraischen Gleichungen, sagen wir von n Gleichungen, hat theoretisch genommen keine Schwierigkeiten und erlaubt denselben Vorgang, nur ist es von vornherein schon sehr umständlich, die n Eliminanten

$$F_i(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

in je einer Variablen festzustellen und einen endlichen Bereich für die n Variablen anzugeben, in dem allein die reellen Lösungen $(x_1', x_2', \ldots x_n')$ liegen können.

§ 18. Transzendente Gleichungen.

Die Aufgabe, transzendente Gleichungen in einer Veränderlichen x zu lösen:

$$f(x) = \varphi(x),$$

wo $f(x)$ eine transzendente Funktion, $\varphi(x)$ aber eine transzendente oder nichttranszendente Funktion oder gar eine Konstante sei, wird man entsprechend den früheren Auseinandersetzungen dadurch behandeln, daß man[1]) die Kurven, die die Gleichungen

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = \varphi(x)$$

besitzen, zum Schnitte bringt und von den näherungsweise aus der Zeichnung zu entnehmenden Abszissen der Schnittpunkte, also von Näherungswerten α_1 der Wurzeln x' nach dem Newtonschen Verfahren über Werte

---

[1]) Siehe z. B. Lorenz, Technische Mechanik, S. 137, 233.

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1) - \varphi(\alpha_1)}{f'(\alpha_1) - \varphi'(\alpha_1)}$$

usw. den Wurzeln näher rückt.

Im Falle z. B. die Gleichung vorliegt:

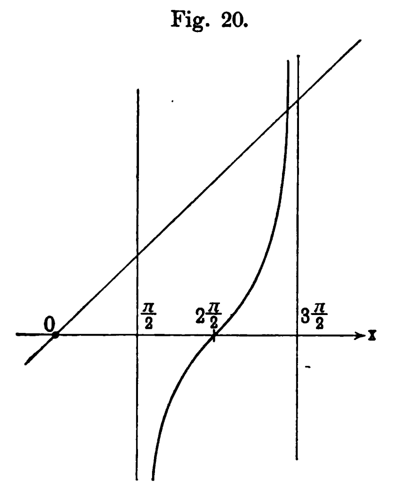
$$\operatorname{tg} x = x,$$

bringe man die Kurven mit den Gleichungen

$$y = x, \qquad y = \operatorname{tg} x$$

zum Schnitt. Eine Zeichnung wie die Figur 20, zeigt dann, daß in dem Intervalle von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ nur die Nullstelle $x = 0$ vorkommt. In dem Intervalle von $\frac{\pi}{2}$ bis $3\frac{\pi}{2}$, sowie in dem von $-\frac{\pi}{2}$ bis $-3\frac{\pi}{2}$ gibt es je eine Nullstelle nahe den Geraden

Fig. 20.



$$x = \pm 3\frac{\pi}{2}.$$

Danach wird man die Werte $\pm 4{\cdot}6$ als Näherungswerte je einer Wurzel ansehen, und das Newtonsche Verfahren liefert:

$$x' = \pm 4{\cdot}4934 \cdots.$$

Ebenso findet man die Lösungen

$$x' = \pm 7{\cdot}7252 \ldots,$$

$$x' = \pm 10{\cdot}9042 \ldots \quad \text{usw.}$$

Als einen Grundgedanken zur Behandlung der transzendenten Gleichungen $f(x) = \varphi(x)$ nehme man den folgenden auf:

Sind die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in der Umgebung einer und derselben Stelle a mit Hilfe der Taylorschen Formel in die Gestalten zu bringen:

$$f(x) = g(x) + R(x), \qquad \varphi(x) = \psi(x) + P(x),$$

so daß $g(x)$ und $\psi(x)$ ganze rationale Funktionen von $(x - a)$ sind, so suche man eine in der Umgebung von a befindliche Stelle α_1, an der wenigstens näherungsweise

$$g(x) = \psi(x)$$

wird, und rücke von dieser nach dem Newtonschen Verfahren näher an eine Nullstelle von $f(x) - \varphi(x)$ hinan.

Doch zur Ermittelung des ersten Näherungswertes α_1 bedarf man nicht notwendig der Taylorschen Formel, sondern man kann statt der Näherungsfunktionen $g(x)$ und $\psi(x)$ auch andere einfache Funktionen als Näherungsfunktionen aufnehmen; kann also etwa die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in der Umgebung derselben Stelle a durch solche rationale gebrochene Funktionen ersetzen, die gute Annäherungen geben, und hierauf in der früheren Weise vorgehen.

Ist z. B. eine Wurzel der Gleichung

$$l(1+x) = \frac{3}{4}x$$

zu finden[1]), ohne daß wie früher Bilder benützt werden, so suche man statt der Funktion $l(1+x)$, die in der Umgebung eins der Stelle null durch die Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

darstellbar ist, eine solche rationale gebrochene Funktion $\gamma(x)$, die in einer Umgebung derselben Stelle $x = 0$ eine mit der Entwickelung von $l(1+x)$, z. B. in den ersten fünf Gliedern übereinstimmende Entwickelung besitzt, so daß dann, wenn die Entwickelung von $\gamma(x)$ allgemein lautet:

$$\gamma(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = -\frac{1}{4}$$

werde. Man wird danach für $\gamma(x)$ etwa die vier Konstanten enthaltende rationale gebrochene Funktion setzen:

$$\frac{ax + bx^2}{1 + cx + dx^2},$$

wird diese nach Potenzen von x entwickeln und die Entwickelung mit

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + a_5 x^5 + \cdots$$

identisch übereinstimmen lassen. Bequemer kann man gleich verlangen, daß

$$ax + bx^2$$

[1]) Schlömilch, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis, I. Teil, 1904, S. 352.

identisch sei mit dem Produkte von $(1 + cx + dx^2)$ und

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + a_5 x^5 + \cdots.$$

Man erhält durch Vergleich der Koeffizienten von x, x^2, x^3, x^4 die Beziehungen:

$$a = 1, \quad b = c - \frac{1}{2}, \quad 0 = d - \frac{c}{2} + \frac{1}{3}, \quad 0 = -\frac{d}{2} + \frac{c}{3} - \frac{1}{4},$$

und aus diesen ergibt sich, daß

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 1, \quad d = \frac{1}{6}$$

zu setzen ist.

Die nunmehr zu behandelnde Gleichung lautet daher:

$$\frac{x\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{1 + x + \frac{x^2}{6}} = \frac{3}{4} x,$$

und dieser genügt

$$\alpha_1 = \sqrt{3} - 1 = 0{\cdot}7320 \cdots.$$

Berechnet man

$$f(\alpha_1) - \varphi(\alpha_1) = 0{\cdot}000\,268, \quad f'(\alpha_1) - \varphi'(\alpha_1) = -1{\cdot}7290,$$

so ergibt sich

$$\alpha_2 = 0{\cdot}733\,60 \cdots.$$

Im Falle der Gleichung

$$\cos x = x$$

kann man ebenso (s. l. c.)

$$\gamma(x) = \frac{a + bx + cx^2}{1 + dx + ex^2}$$

setzen und zum Zwecke der Annäherung an $\cos x$

$$a = 1, \quad b = d = 0, \quad c = -\frac{5}{12}, \quad e = \frac{1}{12}$$

bestimmen. Dann hat man die Gleichung

$$12 - 5x^2 = x(12 + x^2)$$

näherungsweise zu lösen. Es ergibt sich

$$\alpha_1 = 0{\cdot}739 \ldots$$

und hiermit

$$\alpha_2 = 0{\cdot}739\,002 \ldots$$

usw.

Ebenso wäre z. B. die Gleichung zu behandeln

$$a \cos x + b \sin x = c,$$

wo man aber auch die eine trigonometrische Funktion durch die andere ausdrücken wird.

Zur Auflösung der transzendenten Gleichungen kann man natürlich auch die Mehmkesche Methode anwenden, das heißt die logarithmischen Bilder von $f(x)$ und $\varphi(x)$ zum Schnitte bringen und die Abszissen der Schnittpunkte ablesen, so daß man wieder die Logarithmen der zu bestimmenden x Werte ermittelt.

Eine weitere Methode zur Lösung bestünde in besonderen Fällen in der Herstellung von konvergenten Zahlenfolgen, deren Glieder die Eigenschaft besitzen, die Gleichung immer mehr und mehr zu erfüllen [1]).

---

[1]) Sommerfeld, Göttinger Nachrichten, Heft 4, 1898.

Vierter Abschnitt.

Interpolations- und Differenzenrechnung[1].

Erste Abteilung.

Die ganze rationale Funktion als Interpolationsfunktion.

§ 19. Die einfachsten ganzen rationalen Näherungsfunktionen.

Es sei $f(x)$ eine nur an einigen Stellen

$$a_0, \; a_1, \; a_2, \; \ldots \; a_n$$

eines Intervalles von c bis d arithmetisch bekannte, also durch Zahlenwerte beschriebene Funktion. Dann ist es Aufgabe der Interpolationsrechnung, den Wert von $f(x)$ an einer neuen Stelle desselben Intervalles mit Hilfe einer der Rechnung leicht zugänglichen Funktion, z. B. mit Hilfe einer ganzen oder gebrochenen rationalen Funktion oder aber, wenn $f(x)$ die einfach additive Periode 2π besitzt, mit Hilfe einer endlichen trigonometrischen Reihe oder ein andermal mit Hilfe einer Exponentialfunktion oder anderer transzendenten Funktionen näherungsweise zu berechnen.

Hier behandeln wir zunächst den Fall, daß $f(x)$ durch eine gewissen Forderungen genügende ganze rationale Funktion $g(x)$ näherungsweise beschrieben werde und setzen jedesmal

$$f(x) = g(x) + R(x),$$

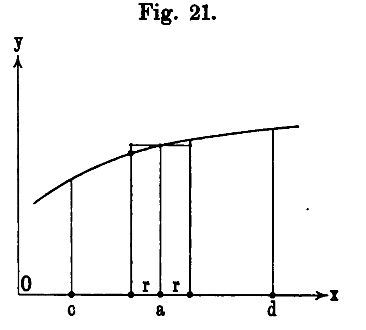
wo das $g(x)$ beigefügte Glied $R(x)$, damit man $f(x)$ erhalte, immer das Restglied heißt.

---

[1]) Gauss' Werke III, S. 163; vgl. Markoff, Differenzenrechnung (deutsch von Friesendorff und Prümm) 1896.

Soll man z. B. $f(x)$ in der Umgebung r einer Stelle a aus dem Intervalle von c bis d, wo die Funktion nicht rasch wachse oder abnehme, so daß der absolute Betrag von $f'(x)$ in a und in der Umgebung r von a nicht groß ist, durch den Wert ersetzen, den $f(x)$ an der Stelle a besitzt, so ist die Näherungsfunktion $g(x)$ in der Umgebung r von a gleich $f(a)$, also eine Konstante (s. Fig. 21).

Fig. 21.



Soll man $f(x)$ hingegen in dem Intervalle von c bis d durch diejenige rationale ganze Funktion $g(x)$ vom ersten Grade ersetzen, die durch die Festsetzungen bestimmt ist:

$$g(c) = f(c), \quad g(d) = f(d),$$

soll man also den Bogen der Kurve $y = f(x)$ von der Stelle $[c, f(c)]$ bis zur Stelle $[d, f(d)]$ durch die Sehne von der einen bis zur anderen Stelle ersetzen, so wird

$$g(x) = f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c).$$

Soll man ferner die Funktion $f(x)$, die an den dem Intervalle (c, d) angehörenden $n + 1$ Stellen

$$a_0, a_1, \ldots a_n$$

die Werte

$$f(a_0), \quad f(a_1), \quad \ldots \quad f(a_n)$$

besitzt, durch die ganze rationale Funktion $g(x)$ $n$ten Grades ersetzen, welche an denselben Stellen dieselben Werte

$$\eta_\nu = f(a_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

annimmt, so gehe man davon aus, daß die an den von a_μ verschiedenen der gegebenen Stellen verschwindende ganze Funktion $n$ten Grades, die noch in a_μ den Wert

$$\eta_\mu = f(a_\mu)$$

besitzt, lautet:

$$\eta_\mu \frac{(x - a_0) \ldots (x - a_{\mu-1})(x - a_{\mu+1}) \ldots (x - a_n)}{(a_\mu - a_0) \ldots (a_\mu - a_{\mu-1})(a_\mu - a_{\mu+1}) \ldots (a_\mu - a_n)},$$

denn jetzt ersieht man, daß die verlangte „Lagrangesche Näherungsfunktion" von $f(x)$ heißt:

$$g(x) = \eta_0 \frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2) \dots (a_0 - a_n)} +$$
$$+ \eta_1 \frac{(x - a_0)(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_n)} +$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ \eta_n \frac{(x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_{n-1})}{(a_n - a_0)(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})},$$

wo

$$\eta_\mu = f(a_\mu)$$

gilt.

Wir schreiben diese auch mit Hilfe der Lehre von den Determinanten ableitbare Interpolationsformel[1]) in der Gestalt:

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \eta_\nu \frac{(x - a_0) \dots /^{(\nu)} \dots (x - a_n)}{(a_\nu - a_0) \dots /_{(\nu)} \dots (a_\nu - a_n)},$$

wo die Striche $/^{(\nu)}$ nur anzeigen sollen, daß im Zähler der Faktor $x - a_\nu$, im Nenner der Faktor $a_\nu - a_\nu$ zu unterdrücken sei.

Verwendet man nach Einführung der Bezeichnung

$$\varphi(x) = (x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_n) = \prod_{\nu=0}^{\nu=n} (x - a_\nu)$$

die bekannte Formel

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{1}{x - a_\nu},$$

die, wie hier zu sagen gestattet sei, nach Differentation der durch Logarithmierung von $\varphi(x)$ entstehenden Gleichung zu gewinnen ist, und aus der folgt, daß

$$\varphi'(a_\mu) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \left(\frac{\varphi(x)}{x - a_\nu}\right)_{a_\mu} = (a_\mu - a_0) \dots /^{(\mu)} \dots (a_\mu - a_n)$$

ist, so wird

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{\eta_\nu}{\varphi'(a_\nu)} \frac{\varphi(x)}{x - a_\nu} \quad [\eta_\nu = f(a_\nu)].$$

Soll endlich der zwischen den Geraden $x = c$ und $x = d$ liegende Teil der Kurve $y = f(x)$ durch den zwischen denselben Geraden liegenden Teil der Geraden ersetzt werden, die den Kurvenbogen in dem Punkte:

[1]) Netto, Elementare Algebra, Akademische Vorlesungen 1904.

$$\left[\frac{c+d}{2},\ f\left(\frac{c+d}{2}\right)\right]$$

berührt, so ist in dem genannten Intervalle die Näherungsfunktion

$$g(x) = f\left(\frac{c+d}{2}\right) + f'\left(\frac{c+d}{2}\right)\left(x - \frac{c+d}{2}\right),$$

denn hier steht nur die x zugehörende Ordinate y der genannten Tangente.

Die bisherigen Näherungsfunktionen stellen $f(x)$ in dem vorgeschriebenen Intervalle (c, d) in verschiedener Weise genau dar, und man hat in jedem Falle den Fehler anzugeben, der begangen wird, wenn man $f(x)$ in einem bestimmten Intervalle durch eine Näherungsfunktion ersetzt.

Das ist in dem Falle eine sehr geläufige Aufgabe, als man $f(x)$ in einer Umgebung r einer Stelle a durch die ganze rationale Funktion $g(x)$ ersetzt, die den $n+1$ Bedingungen genügt:

$$g(a) = f(a),\quad g'(a) = f'(a),\quad \ldots\quad g^{(n)}(a) = f^{(n)}(a),$$

so daß

$$g(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

wird, und man also $f(x)$ in der Umgebung r von a als Summe von dieser Funktion $g(x)$ und dem schon einmal angegebenen Restgliede in der Taylorschen Formel ausdrückt. —

Zunächst soll nun die verschiedene Annäherung verschiedener Näherungsfunktionen einer und derselben Funktion $f(x)$ in einem Beispiele geometrisch versinnlicht werden.

Wird die Funktion

$$y = \frac{1}{1-x},$$

die in dem Intervalle von -1 bis $+1$ durch die dort konvergente unendliche Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

darstellbar ist, in dem genannten Intervalle der Reihe nach näherungsweise durch die ganzen rationalen Funktionen ausgedrückt:

$$1 + x,$$
$$1 + x + x^2,$$
$$1 + x + x^2 + x^3,$$

so veranschaulicht man dann, wenn man x und y als rechtwinkelige Koordinaten deutet und die Kurven mit den Gleichungen:

$$y(1-x)-1=0,$$
$$y=1+x,$$
$$y=1+x+x^2,$$
$$y=1+x+x^2+x^3$$

darstellt, die verschiedenen Annäherungen der Näherungsfunktionen an die gegebene Funktion.

Die erste Gleichung in x und y stellt eine Hyperbel dar, deren Mittelpunkt die Koordinaten (1, 0) hat und deren Asymptoten die Gleichungen $x=1$ bzw. $y=0$ besitzen, so daß die Punkte der Hyperbel, für die der Betrag von x kleiner als eins bleibt, nur auf einem ihrer Zweige liegen.

Die Näherungskurven, wie wir verständlich sagen wollen, berühren diesen Hyperbelzweig in dem Punkte (0, 1) der Reihe nach in der ersten, zweiten und dritten Ordnung. Die erste dieser Kurven ist eine Gerade, die zweite eine Parabel, deren Hauptdurchmesser von dem Scheitel

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

in der Richtung der positiven y Achse verläuft, und die dritte eine Kurve dritter Ordnung C_3, die allein in dem Punkte

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{20}{27}\right)$$

einen reellen Wendepunkt besitzt. Von dieser Stelle ab nimmt die Ordinate von C_3 mit der Abszisse rasch ab und zwar über den Punkt

$$\left(-\frac{3}{4}, \frac{25}{64}\right)$$

nach $(-1, 0)$.

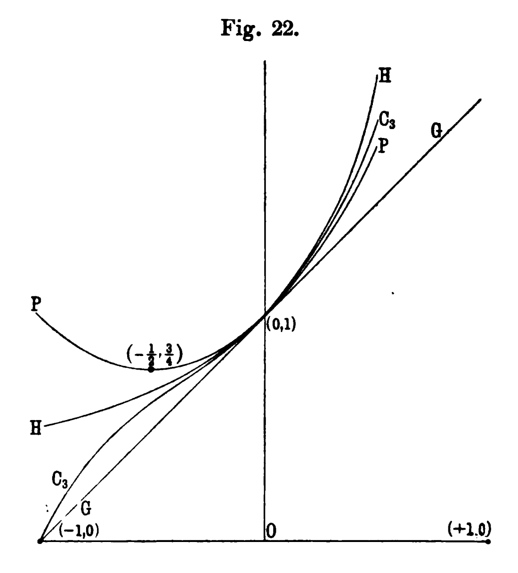
Die Gerade $x=\frac{1}{2}$ schneidet der Reihe nach die Gerade, die Parabel, C_3 und unseren Hyperbelzweig, aber die Gerade

$$x=-\frac{1}{2}$$

die Gerade, C_3, die Hyperbel und die Parabel. Die genannten Folgen der Schnittpunkte dieser zur y Achse parallelen Geraden mit den Näherungskurven und der Hyperbel bleiben erhalten,

wenn man die Geraden je bis in den Abstand eins parallel verschiebt. Durch den Punkt (— 1, 0) geht sowohl die Gerade als auch C_3; alles weitere zeigt die Fig. 22, und weitere Näherungskurven

Fig. 22.



$y = g(x)$, wo $g(x)$ mehr als die ersten vier Glieder der Reihe für die gegebene Funktion enthält, führen immer näher an die Hyperbel.

§ 20. Das Restglied der einfachsten Näherungsfunktionen.

Jetzt gehen wir zur Bestimmung des Restgliedes $R(x)$ in der Formel

$$f(x) = g(x) + R(x),$$

zunächst wenn $g(x)$ die Lagrangesche Interpolationsfunktion ist.

Den Festsetzungen gemäß ist

$$g(a_\nu) = f(a_\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots n),$$

und darum wird $R(x)$ an jeder Stelle a_ν verschwinden; daher kann man

$$R(x) = r(x) \prod_{\nu=0}^{\nu=n} (x - a_\nu)$$

setzen und hat nun die Funktion $r(x)$ aufzusuchen.

Zu diesem Zwecke betrachte man die Funktion:

$$\Phi(z) = f(z) - g(z) - r(x)\prod_{\nu=0}^{\nu=n}(z - a_\nu)\text{[1]},$$

die gewiß die $n+2$ Nullstellen $a_0, a_1, \ldots a_n$ und x besitzt. Setzt man voraus, daß $\Phi(z)$ $(n+1)$-mal differentiierbar sei, so hat die erste Ableitung $\Phi'(z)$ nach dem Satze von Rolle (nach dem nämlich die in einem Intervalle von a bis b als bestehend vorausgesetzte erste Ableitung einer an den Stellen a und b verschwindenden Funktion mindestens eine zwischen a und b liegende unbekannte Nullstelle besitzt, wofür hier der Hinweis auf die geometrische Versinnlichung als Beweis gelten mag) zwischen zwei Nullstellen von $\Phi(z)$ mindestens eine solche und darum zwischen den genannten $n+2$ Nullstellen mindestens $n+1$. Die zweite Ableitung $\Phi''(z)$, d. i. die erste von $\Phi'(z)$, hat nach demselben Satze in dem früheren Intervalle, das die Gesamtheit der in Rede gebrachten Nullstellen von $\Phi'(z)$ umfaßt, mindestens n Nullstellen usw. und die $(n+1)$-ste Ableitung ebendort mindestens eine Nullstelle; sie heiße ξ. Dann wird also

$$\Phi^{(n+1)}(\xi) = 0,$$

und weil $g(z)$ nur vom $n$ten Grade,

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=0}^{\nu=n}(z - a_\nu)$$

aber vom $(n+1)$-sten Grade, daher

$$g^{(n+1)}(z) \equiv 0 \quad \text{und} \quad \varphi^{(n+1)}(z) = (n+1)!$$

ist, so gilt

$$\Phi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - r(x)(n+1)! = 0$$

und

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Danach lautet also die Darstellung von $f(x)$ bei Gebrauch der Lagrangeschen Interpolationsfunktion folgendermaßen:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} f(a_\nu)\frac{(x-a_0)\ldots/^{(\nu)}\ldots(x-a_n)}{(a_\nu-a_0)\ldots/_{(\nu)}\ldots(a_\nu-a_n)} + \\ + \frac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{\nu=0}^{\nu=n}(x-a_\nu),$$

---

[1]) Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien, Leipzig 1902.

wo ξ eine zwischen $a_0, a_1, \ldots a_n$ und x gelegene mittlere, aber unbekannte Stelle bezeichnet.

Wenn man jetzt die $n+1$ Stellen a_ν in eine a zusammenrücken läßt, so nimmt das Restglied die Gestalt an:

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

und ξ bedeutet hier eine zwischen a und x gelegene mittlere, aber unbekannte Stelle.

Versteht man unter ϑ einen zwischen 0 und 1 liegenden Wert, so kann man setzen:

$$\xi = a + \vartheta(x-a),$$

und nun entsteht die Taylorsche Formel:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}[a + \vartheta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

wie wir sie schon einmal vor uns hatten (s. S. 43).

Nennt man

$$x - a = h$$

und setzt

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

in die Form:

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = \int_0^h \frac{t^n}{n!}\,dt,$$

so kann man das Restglied in der Taylorschen Formel nach einem gleich zu beweisenden und später öfter nötigen Mittelwertsatze über bestimmte Integrale auch auf die Form bringen:

$$R(x) = \int_0^a f^{(n+1)}(a+h-t)\,\frac{t^n}{n!}\,dt,$$

wo

$$f^{(n+1)}(a+h-t)$$

die $(n+1)$-ste Ableitung von $f(x)$ für das Argument $(a+h-t)$ bedeutet. Und damit erscheint das Restglied in einer Gestalt, die keine unbekannte mittlere Stelle ξ mehr enthält, und auch so kann es einmal von Vorteil sein.

Der Mittelwertsatz handelt von bestimmten Integralen

$$\int_\alpha^\beta F(t)\,dt,$$

in denen $F(t)$ das Produkt zweier Faktoren $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ ist, von denen der eine, etwa $\psi(t)$, in dem Integrationsintervalle sein Zeichen nicht ändert, wie in unserem Falle $\frac{t^n}{n!}$ zwischen 0 und h sein Zeichen bewahrte; und er sagt, daß man das bestimmte Integral dann als ein Produkt darstellen könne:

$$\varphi(\tau)\int_\alpha^\beta \psi(t)\,dt,$$

wo τ einen bestimmten, aber unbekannten mittleren Wert von t in dem Integrationsintervalle bezeichnet.

Heißt in unserem Falle der mittlere Wert

$$\tau = \Theta h,$$

ist also

$$0 < \Theta < 1,$$

und nennt man

$$1 - \Theta = \vartheta,$$

so ergibt sich umgekehrt aus unserem Restgliede in Gestalt des bestimmten Integrales die frühere „Lagrange“sche Form des Restes. Aus dem Lagrangeschen Restgliede folgt aber auch wieder das Restglied in Gestalt eines bestimmten Integrales.

Beweis des Mittelwertsatzes: Ist, wie gesagt, $\psi(t)$ für die t Werte des Integrationsintervalles von konstantem, positiven oder negativen Zeichen, ist aber daselbst

$$m \leqq \varphi(t) \leqq M,$$

so ist auch

$$m\,\psi(t) \leqq \varphi(t)\,\psi(t) \leqq M\,\psi(t)$$

beziehungsweise

$$m\,\psi(t) \geqq \varphi(t)\,\psi(t) \geqq M\,\psi(t),$$

und entsprechend

$$m\int_\alpha^\beta \psi(t)\,dt \leqq \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\psi(t)\,dt \leqq M\int_\alpha^\beta \psi(t)\,dt$$

oder

$$m\int_\alpha^\beta \psi(t)\,dt \geqq \int_\alpha^\beta \varphi(t)\psi(t)\,dt \geqq M\int_\alpha^\beta \psi(t)\,dt,$$

und darum wird — wie behauptet war —

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\psi(t)\,dt = \varphi(\tau)\int_\alpha^\beta \psi(t)\,dt,$$

wenn

$$\alpha \leqq \tau \leqq \beta$$

ist.

§ 21. Die allgemeine ganze rationale Interpolationsfunktion und ihr Restglied.

Bevor wir die zu den bekannt gewordenen Näherungsfunktionen $g(x)$ gehörenden Restglieder in besonderen Fällen anwenden, soll zuerst noch eine besondere Interpolationsfunktion abgeleitet und dann eine allgemeine Form für die Näherungsfunktion entwickelt werden, wenn sie eine ganze rationale Funktion ist.

Es sei die ganze rationale Funktion $g(x)$ vom Grade $2n+1$ zu finden, die den $2n+2$ Bedingungen genügt:

$$g(a_\nu) = f(a_\nu), \quad g'(a_\nu) = f'(a_\nu), \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n)\text{[1]}.$$

Man setze die verlangte Funktion in der Gestalt an:

$$g(x) = g_0(x) + \varphi(x)\vartheta(x),$$

wo

$$g_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{f(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}\,\frac{\varphi(x)}{x-a_\nu}, \quad \varphi(x) = \prod_{\nu=0}^{\nu=n}(x-a_\nu),$$

aber $\vartheta(x)$ eine solche ganze Funktion $n$ten Grades sei, daß $g(x)$ den zweiten $n+1$ der $2n+2$ Bedingungen Genüge leistet, nachdem den $n+1$ ersten der gestellten Bedingungen schon entsprochen wurde.

Es ist nun

$$g'(a_\nu) = g_0'(a_\nu) + \varphi'(a_\nu)\vartheta(a_\nu) = f'(a_\nu),$$

also soll

$$\vartheta(a_\nu) = \frac{f'(a_\nu) - g_0'(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)} \quad (\nu = 0, 1, \ldots n)$$

[1]) Markoff, Differenzenrechnung, S. 4.

werden, und man kann nach der Lagrangeschen Interpolationsformel anschreiben:

$$\vartheta(x) = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \frac{f'(a_\mu) - g_0'(a_\mu)}{\varphi'(a_\mu)} \frac{\varphi(x)}{\varphi'(a_\mu)(x - a_\mu)}.$$

Hierzu bemerke man, daß

$$g_0'(x) = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \frac{f(a_\mu)}{\varphi'(a_\mu)} \frac{(x - a_\mu)\varphi'(x) - \varphi(x)}{(x - a_\mu)^2} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \frac{f(a_\mu)}{\varphi'(a_\mu)} \frac{\varphi'(x) - \dfrac{\varphi(x)}{x - a_\mu}}{(x - a_\mu)} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \frac{f(a_\mu)}{\varphi'(a_\mu)} \frac{\varphi(x)}{x - a_\mu} \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{1}{x - a_\nu} - \frac{1}{x - a_\mu} \right)$$

wird und beachte, daß nun $g_0'(a_\mu)$ eine homogene lineare Funktion der $f(a_\mu)$ wird, etwa

$$g_0'(a_\mu) = f(a_0) A_0^{(\mu)} + f(a_1) A_1^{(\mu)} + \cdots + f(a_n) A_n^{(\mu)}.$$

Die Koeffizienten $A_\nu^{(\mu)}$ brauchen wir nicht zu berechnen, weil es uns später nur um die Form von $g(x)$ zu tun sein wird, die wir noch feststellen müssen. Bei Benützung der Zeichen $A_\nu^{(\mu)}$ wird

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} f(a_\nu) \left[\frac{\varphi(x)}{\varphi'(a_\nu)(x - a_\nu)} - \sum_{\mu=0}^{\mu=n} A_\nu^{(\mu)} \frac{\varphi^2(x)}{\varphi'^2(a_\mu)(x - a_\mu)} \right] +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\nu=n} f'(a_\nu) \frac{\varphi^2(x)}{\varphi'^2(a_\nu)(x - a_\nu)}. -$$

Jetzt ist

$$\Phi(z) = f(z) - g(z) - r(x) \prod_{\nu=0}^{\nu=n} (z - a_\nu)^2$$

eine Funktion mit den Nullstellen

$$a_0, \; a_1, \; \ldots \; a_n \quad \text{und} \quad x,$$

von denen die ersten $n + 1$ doppelt zählen, und nach dem Satze von Rolle wird die $(2n + 2)$-te Ableitung von $\Phi(z)$ an einer zwischen diesen Nullstellen liegenden unbekannten Stelle ξ verschwinden und so wird

$$f^{(2n+2)}(\xi) - r(x)(2n + 2)! = 0$$

und

$$r(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n + 2)!}.$$

Insbesondere wird also in dem eingangs erwähnten Falle (s. S. 95) der Näherungsfunktion

$$f\left(\frac{c+d}{2}\right)+f'\left(\frac{c+d}{2}\right)\left(x-\frac{c+d}{2}\right)$$

das Restglied

$$\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{c+d}{2}\right)^2.$$

Es wäre nun möglich, die Verallgemeinerung der letzten Näherungsfunktion dahin zu vollführen, daß man die Funktion $g(x)$ ermittelt, die den $3n+3$ Bedingungen genügt:

$$g(a_\nu)=f(a_\nu),\quad g'(a_\nu)=f'(a_\nu),\quad g''(a_\nu)=f''(a_\nu),$$

und sie in der Gestalt ansetzt:

$$g(x)=g_0(x)+\varphi(x)\vartheta(x)+\varphi^2(x)\Theta(x)$$

und so fortfährt, wobei $\nu=0, 1, 2, \ldots n$ zu setzen ist.

Doch ist es vorteilhafter, gleich allgemein die ganze rationale Funktion $g(x)$ niedrigsten Grades in Erwägung zu ziehen, die an den Stellen $a_0, a_1, \ldots a_n$ die Eigenschaften hat, dieselben Werte wie $f(x)$ anzunehmen, und die Eigenschaften, daß die ersten (α_0-1) bzw. (α_1-1) usw. bzw. (α_n-1) Ableitungen in a_0 bzw. $a_1 \ldots$ bzw. a_n mit den gleichnamigen von $f(x)$ übereinstimmen [1]).

Nennt man

$$\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m,$$

so soll eine ganze Funktion niedrigsten, also $(m-1)$-sten Grades mit m Koeffizienten gefunden werden, die m Forderungen genügt.

Führt man die Bezeichnungen ein:

$$\gamma_{\alpha_\nu}(x-a_\nu)=A_0^{(\nu)}+A_1^{(\nu)}\frac{x-a_\nu}{1!}+\cdots+A_{\alpha_\nu-1}^{(\nu)}\frac{(x-a_\nu)^{\alpha_\nu-1}}{(\alpha_\nu-1)!}$$
$$(\nu=0, 1, 2, \ldots n),$$

so kann man $g(x)$ in der Form aufnehmen:

$$\begin{aligned}g(x)=\gamma_{\alpha_0}(x-a_0)&+(x-a_0)^{\alpha_0}\cdot\gamma_{\alpha_1}(x-a_1)+\\&+(x-a_0)^{\alpha_0}(x-a_1)^{\alpha_1}\cdot\gamma_{\alpha_2}(x-a_2)+\cdots\\&+(x-a_0)^{\alpha_0}\ldots(x-a_{n-1})^{\alpha_{n-1}}\cdot\gamma_{\alpha_n}(x-a_n)\end{aligned}$$

---

[1]) Siehe Markoff l. c. und zur Formel von Markoff im achten Bande des Archivs für Mathematik und Physik den Aufsatz von G. Zemplén.

und man sieht, daß, im Falle alle $\alpha_\nu = 1$ sind, $g(x)$ die Gestalt erhält:

$$g(x) = A_0 + A_1(x - a_0) + A_2(x - a_0)(x - a_1) + \cdots \\ + A_n(x - a_0)(x - a_1)\ldots(x - a_{n-1}).$$

Ferner wird in dem jetzigen Falle:

$$\Phi(z) = f(z) - g(z) - r(x)\prod_{\nu=0}^{\nu=n}(z - a_\nu)^{\alpha_\nu}$$

und die $m$te Ableitung von $\Phi(z)$ besitzt zwischen den Stellen a_ν und x mindestens eine Nullstelle ξ. Es ist also

$$f^{(m)}(\xi) - r(x)m! = 0$$

und

$$f(x) = g(x) + \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}\prod_{\nu=0}^{\nu=n}(z - a_\nu)^{\alpha_\nu}.$$

Doch kann man natürlich in der Umgebung von a_ν auch setzen:

$$f(x) = \gamma_{\alpha_\nu}(x - a_\nu) + \int_0^{h_\nu} f^{(\alpha_\nu)}(a_\nu + h_\nu - t_\nu)\frac{t_\nu^{\alpha_\nu - 1}}{(\alpha_\nu - 1)!}\,dt_\nu,$$

wobei $h_\nu = x - a_\nu$ ist.

§ 22. Die Verwendung der ganzen Interpolationsfunktion zur Darstellung einer Abhängigkeit.

Will man nun die Darstellung einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ in dem die Stellen $a_0, a_1, \ldots a_n$ umfassenden Intervalle von c bis d durch eine ganze rationale Funktion $g(x)$ als Näherungsfunktion und das entsprechende Restglied $R(x)$ verwenden, so suche man den Maximalwert dieses Restgliedes zu erkennen, der sich ergibt, indem man die unbekannte Stelle ξ in dem Intervalle verschieden wählt und x das Intervall durchlaufen läßt. Heißt der größte Wert oder gar ein Wert, der größer ist als der Maximalwert des Restgliedes, M, so wird man $f(x)$ an irgend einer Stelle des Intervalles bis auf den Wert M durch $g(x)$ ausdrücken und berechnen können. Wenn M klein ist, so liefert $g(x)$ den Wert von $f(x)$ zu gewissem Zwecke, den gerade einmal eine Aufgabe erheischt, genau genug, d. h. die Funktion $f(x)$ wird allein durch $g(x)$ dargestellt werden können.

Indem man den Näherungswert von $f(x)$ an einer von den Stellen a_ν verschiedenen Stelle a durch $g(x)$ berechnet, sagt man, man interpoliere $f(x)$ mit Hilfe oder durch die ganze rationale Funktion $g(x)$.

Man kann der Einfachheit halber die Stellen a_μ in dem Intervalle von c bis d äquidistant wählen und etwa

$$a_0 = c, \quad a_\mu = c + \mu \frac{d-c}{n} \quad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

setzen und wie früher die ganze Funktion niedrigsten Grades $g(x)$ bilden, die in c und an den n Stellen a_μ dieselben Werte annimmt wie $f(x)$, aber dann auch fragen, ob und unter welchen Bedingungen bei immer größer werdendem n

$$\lim_{n=\infty} g_n(x)$$

eine bestimmte Funktion $G(x)$ ergibt, die außerdem in dem Intervalle von c bis d die gegebene Funktion $f(x)$ darstellt. Ob und wann also zu der möglicherweise auftretenden bestimmten Funktion $G(x)$ keine neue $\lim\limits_{n=\infty} R(x)$ hinzutreten muß oder hinzutritt, damit $f(x)$ in dem Intervalle von c bis d durch $G(x)$ dargestellt werde. Das muß, wie man sieht, gar nicht mit der Existenz von $G(x)$ zusammentreffen, weil ja bei dem Übergange zur Grenze erstens die Existenz des Rolleschen Satzes gar nicht mehr feststeht, denn es fallen ja nun in das endliche Intervall von c bis d unbegrenzt viele Stellen a_μ hinein, und weil zweitens die Aussage $\lim\limits_{n=\infty} R(x) = 0$ erst erwiesen werden müßte.

Aber hier kann es nicht die Aufgabe sein, die Umstände zu entwickeln, wann $G(x)$ existiert und wann $G(x)$ in einem bestimmten Intervalle $f(x)$ darstellt, denn man bedürfte hierzu mit Runge[1]) Hilfsmittel, die wir hier nicht in Anspruch nehmen können. Es erschien nur passend, diese Fragen aufzuwerfen, weil sich ähnliche Fragen auch späterhin aufdrängen werden.

Nun soll aber mit wenigen Worten von der Darstellung einer Abhängigkeit die Rede sein. Will man eine solche durch eine ganze rationale Funktion ungefähr beschreiben, so halte man sich vor Augen, daß man jetzt weder $f(x)$ noch $f^{(n+1)}(\xi)$ besitzt. Es wird darum später auch nur von der näherungs-

[1]) Runge, Mathem. Annal., Bd. 46 und l. c. (s. S. 44), S. 126.

weisen Bildung der $m$ten Ableitung einer Funktion auf Grund von $m + 1$ ihrer Werte die Rede sein. — Ferner bedenke man, daß bei einer Darstellung einer auf Grund von Beobachtungen gesetzten Abhängigkeit von einem Restgliede nur insoweit die Rede sein könne, daß ein dem „Restgliede einer Funktion" nachgebildeter, näherungsweise hergestellter Ausdruck gemäß von Erfahrungen in einem Intervalle von c bis d entweder zu vernachlässigen ist oder nicht, und somit die Abhängigkeit durch die Näherungsfunktion zu beschreiben ist oder aber diese Beschreibung unmöglich oder unzulässig ist.

Im Falle periodisch verlaufender Abhängigkeiten werden wir auf eine analytische Beschreibung derselben wieder zu sprechen kommen.

§ 23. Eine praktische Verwertung der Interpolationsfunktion.

Jetzt handle es sich um eine praktische Verwertung der bisherigen Interpolationsformeln.

Es sei die Funktion $f(x) = \log x$ an den Stellen a und $a + 1$ vorgelegt und man soll diesen Briggschen oder gemeinen Logarithmus in dem Intervalle von a bis $a + 1$ durch die ganze rationale Funktion ersten Grades näherungsweise beschreiben, die für $x = a$ und $x = a + 1$ die Werte $\log a$ und $\log(a + 1)$ annimmt; welches wird der Fehler?

Die Näherungsfunktion ersten Grades lautet:

$$\begin{aligned} g(x) &= \log a \frac{x - (a+1)}{a - (a+1)} + \log(a+1) \frac{x - a}{(a+1) - a} = \\ &= \log a + [\log(a+1) - \log a](x - a) = \\ &= \log a + \log\left(1 + \frac{1}{a}\right)(x - a), \end{aligned}$$

und weil

$$f'(x) = \frac{d \log x}{dx} = \frac{\log e}{x} = \frac{M}{x} = \frac{0{\cdot}434\,29\ldots}{x} < \frac{0{\cdot}5}{x},$$

$$f''(x) = -\frac{M}{x^2}$$

ist, so heißt das Restglied:

$$R(x) = -\frac{M}{2!\,\xi^2}(x - a)[x - (a + 1)].$$

Indem man x von a bis $a + 1$ ändert, nimmt

$$(x - a)[x - (a + 1)]$$

für

$$x = a + \frac{1}{2}$$

den größten Wert an, nämlich den Wert $-\frac{1}{4}$, und darum wird in dem betrachteten Intervalle:

$$\left| R(x) \right| < \frac{M}{8 \xi^2} < \frac{1}{16 \xi^2} \leqq \frac{1}{16 a^2}.$$

Rechnet man also mit fünfstelligen Tafeln, wo die Mantissen der Logarithmen vierstelliger ganzer Zahlen in fünf Dezimalstellen angegeben sind, setzt a und ξ vom Range drei und zum mindesten gleich 10^3 voraus, so wird der Fehler von $\log x$, wenn x zwischen a und $a + 1$ liegt, bei der Berechnung mit Hilfe der früheren ganzen Funktion ersten Grades kleiner als

$$\frac{1}{16 . 10^6},$$

was auch a für eine Zahl vom Range drei sei[1]).

Will man aber den Logarithmus von x in Beziehung auf die Basis 10 nach Angabe seiner an den drei Stellen der arithmetischen Reihe

$$x = a, \quad a + h, \quad a + 2h$$

vorkommenden Werte in dem Intervalle von a bis $a + 2h$ durch eine Näherungsfunktion vom zweiten Grade beschreiben, so ist nach Einführung der Bezeichnungen

$$a = a_0, \quad a + h = a_1, \quad a + 2h = a_2$$

zu setzen:

$$\log x = \log a_0 \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + \log a_1 \frac{(x - a_0)(x - a_2)}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)} +$$
$$+ \log a_2 \frac{(x - a_0)(x - a_1)}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)} + \frac{f'''(\xi)}{3!} (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2);$$

---

[1]) Bei kleinem $a \geq 1$ kann man nicht ebenso vorgehen, denn es würde nicht gut möglich sein, die Kurve $y = \log x$ in dem Intervalle von a bis $a + 1$ durch die Sehne zu ersetzen. Darum bilde man das Intervall etwa durch $\xi = 10^k x$, wo k eine positive Zahl, größer als eins sei, auf einen solchen Teil der x Achse ab, wo die logarithmische Kurve nicht mehr rasch ansteigt, und dort gehe man in der früheren Art vor.

doch das Restglied heißt auch

$$\frac{2M}{6\xi^3}[x^3 - x^2(a_0 + a_1 + a_2) + x(a_0 a_1 + a_0 a_2 + a_1 a_2) - a_0 a_1 a_2] =$$

$$= \frac{M}{3\xi^3}[x^3 - x^2(3a + 3h) + x(3a^2 + 6ah + 2h^2) -$$

$$- (a^3 + 3a^2 h + 2ah^2)].$$

Darum, weil hier die Klammergröße ihre extremen Werte für die Lösungen der Gleichung

$$x^2 - \frac{2}{3}(a_0 + a_1 + a_2)x + \frac{1}{3}(a_0 a_1 + a_0 a_2 + a_1 a_2) = 0$$

annimmt und zwar den Maximalwert für

$$x_1 = \frac{1}{3}(a_0 + a_1 + a_2) - \frac{1}{3}\sqrt{(a_0 + a_1 + a_2)^2 - 3(a_0 a_1 + a_0 a_2 + a_1 a_2)},$$

so wird eine obere Grenze des Restgliedes durch den Ausdruck angegeben:

$$\frac{1}{3}\frac{M}{a_0^3}[x_1^3 - x_1^2(a_0 + a_1 + a_2) + x_1(a_0 a_1 + a_0 a_2 + a_1 a_2) - a_0 a_1 a_2].$$

Die näherungsweise Darstellung von $\log x$ durch die hier genannte Funktion zweiten Grades gebraucht man bei der interpolatorischen Berechnung des Logarithmus, wenn er mehr als siebenstellig ist.

§ 24. Berechnung der Koeffizienten einer Interpolationsfunktion.

Die Lagrangesche Interpolationsformel, die eine ganze rationale Funktion $(n-1)$-sten Grades, $g_{n-1}(x)$, bestimmen lehrte, welche an n vorgegebenen Stellen a_ν $[\nu = 0, 1, 2, \ldots (n-1)]$ bestimmte Werte

$$\eta_\nu = f(a_\nu)$$

annahm, hat den einen großen Nachteil, in jedem ihrer Glieder verändert werden zu müssen, wenn statt der ganzen Funktion $(n-1)$-sten Grades eine neue vom $n$ten Grade $g_n(x)$ verlangt wird, die außer den früheren Bedingungen noch der weiteren genügt, an einer $(n+1)$-sten Stelle a_n den vorgegebenen Wert

$$\eta_n = f(a_n)$$

anzunehmen.

Um diesen Nachteil zu beheben, verlangen wir die ganze rationale Funktion $(n-1)$-sten Grades $g_{n-1}(x)$ in einer solchen

Gestalt, daß diese ohne eine Veränderung auch in der Funktion $g_n(x)$ auftritt, die den Bedingungen von $g_{n-1}(x)$ und noch einer gleichartigen neuen genügt. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß $g_{n-1}(x)$ die uns schon begegnete Form annehme (s. S. 104):

$$g_{n-1}(x) = A_0 + A_1(x - a_0) + A_2(x - a_0)(x - a_1) + \cdots \\ + A_{n-1}(x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_{n-2}),$$

worauf

$$g_n(x) = A_0 + A_1(x - a_0) + A_2(x - a_0)(x - a_1) + \cdots \\ + A_n(x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_{n-1})$$

wird.

Die Koeffizienten

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots \quad A_n$$

von $g_n(x)$, das wir in Hinkunft nur mehr mit $g(x)$ bezeichnen, sind somit den Bedingungen unterworfen:

$$\begin{aligned} g(a_0) &= \eta_0 = A_0, \\ g(a_1) &= \eta_1 = A_0 + A_1(a_1 - a_0), \\ g(a_2) &= \eta_2 = A_0 + A_1(a_2 - a_0) + A_2(a_2 - a_0)(a_2 - a_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g(a_n) &= \eta_n = A_0 + A_1(a_n - a_0) + A_2(a_n - a_0)(a_n - a_1) + \cdots \\ &\quad + A_n(a_n - a_0)(a_n - a_1) \ldots (a_n - a_{n-1}), \end{aligned}$$

wo nun nicht angeschrieben ist, daß die Werte η_ν mit den Werten $f(a_\nu)$ übereinstimmen sollen, was ja auch durchaus nicht der Fall sein muß und auch nicht der Fall sein wird, wenn die Funktionswerte $f(a_\nu)$ nur näherungsweise angebbar sind und daher die Näherungsfunktion $g(x)$ an den Stellen a_ν nur näherungsweise mit der Funktion $f(x)$ übereinstimmt.

Aus der ersten, aus den ersten zwei oder den ersten drei der früheren Gleichungen ergibt sich

$$A_0 = \eta_0 = g(a_0),$$

$$A_1 = \frac{\eta_1 - \eta_0}{a_1 - a_0} = \frac{g(a_0)}{a_0 - a_1} + \frac{g(a_1)}{a_1 - a_0},$$

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1, & 0, & g(a_0) \\ 1, & a_1 - a_0, & g(a_1) \\ 1, & a_2 - a_0, & g(a_2) \end{vmatrix}}{(a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)} = \frac{g(a_0)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + \\ + \frac{g(a_1)}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)} + \frac{g(a_2)}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)},$$

und es liegt die Vermutung nahe, daß auch

$$A_\nu = \frac{g(a_0)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)\ldots(a_0 - a_\nu)} + \\ + \frac{g(a_1)}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_\nu)} + \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad (\nu = 3, 4, \ldots n) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ + \frac{g(a_\nu)}{(a_\nu - a_0)(a_\nu - a_1)\ldots(a_\nu - a_{\nu-1})}$$

werde und sich somit das hier ausgesprochene Bildungsgesetz der Koeffizienten der $g(a_\varkappa)$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots \nu)$ bewahrheite, d. h., daß man in dem Ausdrucke für A_ν aus dem Koeffizienten von $g(a_\varkappa)$, das ist aus

$$\frac{1}{(a_\varkappa - a_0)(a_\varkappa - a_1)\ldots /_{(\varkappa)} \ldots (a_\varkappa - a_\nu)}$$

den von $g(a_\lambda)$ durch Vertauschung von $\varkappa$ und λ finde.

Der Beweis hiefür soll mit Hilfe von Betrachtungen über Determinanten abgeleitet werden[1]). Man sieht, daß die Auflösung der vorgelegten $n + 1$ Gleichungen für A_n liefert:

$$A_n = \frac{1}{\prod\limits_{\mu,\nu=1}^{\mu,\nu=n} (a_\mu - a_\nu)} \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & . & g(a_0) \\ 1, & a_1 - a_0, & 0, & . & g(a_1) \\ 1, & a_2 - a_0, & (a_2 - a_0)(a_2 - a_1), & . & g(a_2) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1, & a_n - a_0, & (a_n - a_0)(a_n - a_1), & . & g(a_n) \end{vmatrix},$$

wo das Produkt über alle Differenzen $a_\mu - a_\nu$ auszudehnen ist, in denen $\mu > \nu$ ist, und gleich in diesem letzten Falle soll gezeigt werden, was in den ersten drei Fällen wahrgenommen wurde und für den allgemeinen Fall vermutet war.

Stellt man in dem Zähler des Ausdruckes für A_n die Determinante als Summe der Produkte der Elemente der letzten Vertikalreihe und ihrer n-zeiligen Unterdeterminanten dar, so findet man als letztes Glied das folgende:

$$g(a_n) \prod_{\mu,\nu=0}^{n-1} (a_\mu - a_\nu),$$

[1]) Biermann, Monatsh. f. Mathem. u. Phys., Jahrg. XVI.

und darum hat A_n gewiß das Glied:

$$\frac{g(a_n)}{(a_n - a_0)(a_n - a_1) \ldots (a_n - a_{n-1})}.$$

Es ist zu zeigen, daß der Koeffizient von $g(a_\nu)$ in dem Ausdrucke für A_n aus dem von $g(a_n)$ erhalten wird, wenn man n mit ν vertauscht, und daß somit gilt:

$$A_n = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{g(a_\nu)}{(a_\nu - a_0) \ldots /(\nu) \ldots (a_\nu - a_n)}.$$

Zum Beweise führe man die Bezeichnung ein:

$$P_k^{(l)} = (a_k - a_0)(a_k - a_1) \ldots (a_k - a_l),$$

wo $l < k \leqq n$ ist, so daß die Determinante des gegebenen Gleichungensystems in der Form zu schreiben ist:

$$1\, P_1^{(0)} P_2^{(1)} \ldots P_n^{(n-1)}.$$

Die n-zeilige Unterdeterminante von $g(a_{n-1})$ in der $(n+1)$-zeiligen Determinante des Zählers in dem Ausdrucke für A_n heißt dann:

$$(-1)^{2n-1} P_n^{(n-2)} \,.\, 1 \,.\, P_1^{(0)} P_2^{(1)} \ldots P_{n-2}^{(n-3)}$$

und darum der Koeffizient von $g(a_{n-1})$:

$$\frac{-P_n^{(n-2)}}{P_{n-1}^{(n-2)} P_n^{(n-1)}} = \frac{1}{(a_{n-1} - a_0) \ldots (a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n-1} - a_n)},$$

d. h. er wird aus dem von $g(a_n)$ durch Vertauschung von n und $n - 1$ gefunden.

Zum Beweise, daß diese Eigenschaft bezüglich des Koeffizienten jedes Elementes $g(a_\nu)$ gilt, schreiben wir zunächst den Koeffizienten von $g(a_\nu)$ heraus. Er heißt:

$$\frac{(-1)^{n+\nu} P_{\nu-1}^{(\nu-2)} \ldots P_2^{(1)} P_1^{(0)}\, 1}{P_n^{(n-1)} \ldots P_2^{(1)} P_1^{(0)}\, 1} \begin{vmatrix} P_{\nu+1}^{(\nu-1)}, & P_{\nu+1}^{(\nu)}, & 0, & \ldots & 0, & 0 \\ P_{\nu+2}^{(\nu-1)}, & P_{\nu+2}^{(\nu)}, & P_{\nu+2}^{(\nu+1)}, & \ldots & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ P_{n-2}^{(\nu-1)}, & P_{n-2}^{(\nu)}, & P_{n-2}^{(\nu+1)}, & \ldots & P_{n-2}^{(n-3)}, & 0 \\ P_{n-1}^{(\nu-1)}, & P_{n-1}^{(\nu)}, & P_{n-1}^{(\nu+1)}, & \ldots & P_{n-1}^{(n-3)}, & P_{n-1}^{(n-2)} \\ P_n^{(\nu-1)}, & P_n^{(\nu)}, & P_n^{(\nu+1)}, & \ldots & P_n^{(n-3)}, & P_n^{(n-2)} \end{vmatrix},$$

und geht für $v = n - 1$ in den schon angegebenen Koeffizienten von $g(a_{n-1})$ und auch bei Vertauschung von v und $n - 1$ in diesen Koeffizienten über. Weil aber, wie wir wissen, der Koeffizient von $g(a_{n-1})$ in den von $g(a_n)$ übergeht, sobald man a_{n-1} mit a_n vertauscht, so wird der Koeffizient von $g(a_v)(v < n - 1)$ auch in den von $g(a_n)$ übergehen, wenn man v mit n vertauscht.

Wenn man umgekehrt in dem Koeffizienten von $g(a_n)$ n durch v ersetzt und auch v durch n, damit man keinen Faktor $a_v - a_v$ im Nenner erhalte und damit A_n endlich bleibe, d. h. wenn man n mit v vertauscht, so gelangt man von dem Koeffizienten von $g(a_n)$ zu dem von $g(a_v)$. Erhielte man nämlich einen anderen Ausdruck als Koeffizienten von $g(a_v)$, so lieferte dann umgekehrt die Vertauschung von v und n nicht den Koeffizienten von $g(a_n)$, wie das eben der Fall war. Der gesetzte Fall ist aber unmöglich, weil man es in den Ausdrücken für die Koeffizienten nur mit eindeutigen, nämlich mit rationalen Funktionen der Größen a_v zu tun hat.

Hiernach sind also die Koeffizienten A_v in der Funktion $g(x)$ auf Grund der $n + 1$ Forderungen bestimmt, daß die ganze Funktion $n$ten Grades an den $n + 1$ Stellen a_v die Werte η_v annehme.

§ 25. Die beste Näherungsfunktion.

Indem man die in dem letzten Paragraphen vorgegebenen Werte η_v gleich $f(a_v)$ setzt, wird $g(x)$ eine Näherungsfunktion von $f(x)$, und jetzt ist die Frage nach derjenigen Näherungsfunktion berechtigt, die an den $n + 1$ Stellen a_v solche Werte $g(a_v)$ annimmt, daß die Summe der Fehlerquadrate der Näherungsfunktion gegenüber $f(x)$ an den Stellen a_v, also der Ausdruck

$$\sum_{v=0}^{v=n} [f(a_v) - g(a_v)]^2$$

ein Minimum werde; dann heiße $g(x)$ die beste Näherungsfunktion.

Diese aus der Methode der kleinsten Quadrate hierher übernommene Fragestellung wird mit Rücksicht auf spätere Fragen schon hier aufgenommen.

Es sollen also die Koeffizienten A_v als derartige Funktionen der Größen a_v berechnet werden, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen von $f(x)$ und $g(x)$ an den gegebenen $n + 1$

Stellen a_ν am kleinsten werde. Setzt man $g(x)$ wieder in die frühere Form:

$$A_0 + A_1(x - a_0) + \cdots + A_n(x - a_0) \ldots (x - a_{n-1}),$$

so wird

$$g(a_\nu) = A_0 + A_1(a_\nu - a_0) + \cdots + A_\nu(a_\nu - a_0) \cdots (a_\nu - a_{\nu-1}).$$

Bezeichnet man nun diesen Ausdruck mit C_ν, bildet die halben Ableitungen von

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} [f(a_\nu) - C_\nu]^2$$

nach den Unbekannten A_ν und setzt diese Ableitungen zur Erfüllung unserer Forderung gleich null, so soll also

$$[f(a_0) - C_0] + [f(a_1) - C_1] + \cdots + [f(a_n) - C_n] = 0,$$
$$(a_1 - a_0)[f(a_1) - C_1] + \cdots + (a_n - a_0)[f(a_n) - C_n] = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_n - a_0) \ldots (a_n - a_{n-1})[f(a_n) - C_n] = 0$$

sein. Doch weil die Determinante dieser in den Klammergrößen $f(a_\nu) - C_\nu$ linearen und homogenen Gleichungen dem Produkte ihrer Diagonalglieder gleichkommt und dieses zufolge der Annahme, daß $n + 1$ verschiedene Stellen a_ν vorgegeben seien, nicht verschwindet, so sind die linearen Gleichungen nur befriedigt, wenn die Klammergrößen selbst verschwinden. Damit aber erfährt man, daß

$$g(a_\nu) = C_\nu = f(a_\nu) = \eta_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$$

sein müsse, was zwar nicht überrascht, aber doch zu der Aussage berechtigt:

Unter den ganzen rationalen Funktionen $n$ten Grades $g(x)$, die an $n + 1$ vorgeschriebenen Stellen a_ν bestimmte Werte η_ν annehmen, ist diejenige die beste Näherungsfunktion von $f(x)$, die an den Stellen a_ν dieselben Werte annimmt wie die Funktion $f(x)$.

§ 26. Die Newtonsche Näherungsfunktion.

Einen besonderen Fall dieser besten Näherungsfunktion schafft man dadurch, daß man die Stellen $a_0, a_1, \ldots a_n$ äquidistant wählt, also jetzt setzt:

$$a_0 = a, \quad a_1 = a + h, \quad \ldots \quad a_n = a + nh.$$

Dann lauten die in dem § 24 enthaltenen Bestimmungsgleichungen für die Größen A_ν, weil $g(a_\nu) = f(a_\nu)$ sein soll, folgendermaßen:

$$A_0 = f(a),$$

$$A_1 = \frac{1}{1!\,h}[f(a+h) - f(a)],$$

$$A_2 = \frac{1}{2!\,h^2}[f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)],$$

. . . .

$$A_\nu = \frac{1}{\nu!\,h^\nu}\left[f(a+\nu h) - \binom{\nu}{1} f(a+\overline{\nu-1}\,h) + \cdots + (-1)^\nu f(a)\right],$$

. . . .

$$A_n = \frac{1}{n!\,h^n}\left[f(a+nh) - \binom{n}{1} f(a+\overline{n-1}\,h) + \cdots + (-1)^n f(a)\right].$$

Führt man hier noch die Bezeichnung ein

$$f(a+\nu h) - \binom{\nu}{1} f(a+\overline{\nu-1}\,h) + \cdots + (-1)^\nu f(a) = \Delta^\nu f(a),$$

so wird dadurch die Näherungsfunktion $g(x)$ im Falle der äquidistanten Stellen

$$a + \nu h \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$$

$$g(x) = f(a) + \frac{\Delta f(a)}{1!\,h}(x-a) + \frac{\Delta^2 f(a)}{2!\,h^2}(x-a)(x-a-h) + \cdots$$
$$+ \frac{\Delta^n f(a)}{n!\,h^n}(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h).$$

Diese sog. Newtonsche Näherungsfunktion wenden wir gleich an, indem wir $\log x$, das an den Stellen a, $a+1$, $a+2$ gegeben sei, bis auf das Restglied:

$$\frac{M}{3\xi^3}[x^3 - 3(a+1)x^2 + (3a^2 + 6a + 2)x - a(a^2 + 3a + 2)]$$

durch die Funktion darstellen:

$$g(x) = \log a + \frac{1}{1!}[\log(a+1) - \log a)](x-a) +$$
$$+ \frac{1}{2!}[\log(a+2) - 2\log(a+1) + \log a](x-a)(x-a-1).$$

Handelt es sich aber allgemein um die Darstellung einer Funktion $f(x)$, die an den $n+1$ äquidistanten Stellen $a + \nu h$ die Werte $f(a+\nu h)$ annehmen soll, so wird

$$f(x) = g(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-nh)$$

und hier ist

$$g(x) = f(a) + \frac{\Delta f(a)}{1!\,h}(x-a) + \cdots$$

$$+ \frac{\Delta^n f(a)}{n!\,h^n}(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}h);$$

und das ist diejenige ganze rationale Funktion $n$ten Grades, welche gegenüber $f(x)$ die beste Annäherung unter denen aufweist, welche an den $n+1$ Stellen $a+\nu h$ vorgegebene Werte besitzen, denn diese Werte sind $f(a+\nu h)$.

Die letzte Formel läßt eine einfachere Schreibweise zu, indem man

$$x - a = hz$$

setzt, und zwar wird:

$$f(a+hz) = f(a) + \frac{\Delta f(a)}{1!}z + \frac{\Delta^2 f(a)}{2!}z(z-1) + \cdots$$

$$+ \frac{\Delta^n f(a)}{n!}z(z-1)\ldots(z-\overline{n-1}) +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(a+h\xi)}{(n+1)!}z(z-1)\ldots(z-n)\,h^{n+1} =$$

$$= f(a) + \Delta f(a)\binom{z}{1} + \Delta^2 f(a)\binom{z}{2} + \cdots + \Delta^n f(a)\binom{z}{n} + R(z),$$

wo ξ zwischen der kleinsten und der größten der drei Zahlen 0, n und z liegt.

Liegt x zwischen a und $a+nh$, so sagt man, daß $f(a+hz)$ bei der Berechnung durch $g(a+hz)$ näherungsweise durch Interpolation bestimmt werde. Doch wenn x außerhalb des genannten Intervalles liegt, so sagt man, man bestimme $f(a+hz)$ mit Hilfe von $g(a+hz)$ durch Extrapolation.

§ 27. Anwendungen der Interpolationsformeln.

Es soll zunächst die Newtonsche Interpolationsformel auf ein besonderes Beispiel angewandt werden.

Bei wiederholter Beobachtung einer Größe habe sich der mittlere Fehler μ und mit dessen Hilfe das Präzisionsmaß der Beobachtungen

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} = 0{\cdot}42$$

ergeben. Darauf werde die Wahrscheinlichkeit dafür verlangt, daß der Fehler einer weiteren Beobachtung kleiner als 3 werde.

Diese Wahrscheinlichkeit wird darum, weil $3 \times 0{\cdot}42 = 1{\cdot}26$ ist, durch den Ausdruck gegeben

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1\cdot26} e^{-t^2} dt,$$

und nun soll dieser Ausdruck näherungsweise berechnet werden, wenn für das bestimmte Integral

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

bei den Werten

$$t = 1{\cdot}15, \qquad 1{\cdot}20, \qquad 1{\cdot}25, \qquad 1{\cdot}30$$

die Werte festgesetzt werden:

$$0{\cdot}896\,12, \qquad 0{\cdot}910\,31, \qquad 0{\cdot}922\,90, \qquad 0{\cdot}934\,00.$$

Es wird nun hier

$$\Delta\, f(1{\cdot}15) = 0{\cdot}014\,19,$$
$$\Delta^2 f(1{\cdot}15) = -\,0{\cdot}001\,60,$$
$$\Delta^3 f(1{\cdot}15) = 0{\cdot}000\,11$$

und ferner gilt

$$a = 1{\cdot}15, \quad h = 0{\cdot}05, \quad x = 1{\cdot}26,$$

so daß man erhält:

$$f(1{\cdot}26) = 0{\cdot}896\,12 + \frac{11}{1!\,5}\,0{\cdot}014\,19 - \frac{11\,.\,6}{2!\,5^2}\,0{\cdot}001\,60 +$$
$$+ \frac{11\,.\,6\,.\,1}{3!\,5^3}\,0{\cdot}000\,11 - \frac{11\,.\,6\,.\,1\,.\,4}{4!\,10^8}\left(\frac{5}{10^2}\right)^4 f''''(\tau) =$$
$$= 0{\cdot}925\,235\,68 - \frac{6875}{10^{16}}\,f''''(\tau),$$

wo τ ein mittlerer Wert in dem Integrationsintervalle von 1·15 bis 1·30 ist.

Es ist nun aber

$$f'(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-t^2};$$

man findet darauf $f''(t)$, $f'''(t)$ und

$$f''''(t) = -\frac{8}{\sqrt{\pi}}\, t\,(2\,t^2 - 3)\, e^{-t^2}$$

und rechnet danach, daß der Betrag des Restgliedes

$$\left| \frac{6875}{\sqrt{\pi}\; 10^{16}}\, 8\,\tau\,(2\,\tau^2 - 3)\, e^{-\tau^2} \right| < \frac{12}{10^{12}}$$

bleibt.

Doch daraus folgt noch nicht, daß der Wert 0·925 235 68 den Wert von $f(t)$ an der Stelle 1·26 auf acht Dezimalstellen genau angibt, denn wir ließen bisher und lassen auch in der nächsten Folge noch ganz außer acht, daß die angegebenen Werte von $f(t)$ mit Fehlern, kleiner als $\frac{1}{10^5}$, behaftet in die Rechnung aufgenommen wurden. Wie weit diese Fehler den Wert von $f(t)$ an der Stelle 1·26 beeinflussen, wird an anderem Orte untersucht werden. —

Jetzt soll bei Vernachlässigung der Ungenauigkeit der Tafelwerte für den Logarithmus die Frage behandelt werden, wie groß die Fehler der linearen Interpolationsfunktion bei Benützung von fünfstelligen Tafeln sind.

Ist zuerst allgemein $f(x)$ eine tabulierte Funktion und findet man ihre Werte für $x = a$ und $x = a + h$, will man aber den Funktionswert an einer Stelle x des Intervalles von a bis $a + h$, so hat man diesen nach der schon wohlbekannten Formel zu berechnen

$$f(x) = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,(x - a) + R(x),$$

wo

$$R(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}\,(x - a)\,(x - a - h)$$

ist, aber der Betrag des Restgliedes

$$|\, R(x)\,| < \frac{h^2}{8}\, |\, f''(\xi)\,|$$

bleibt, weil der Maximalwert von $(x - a)\,(x - a - h)$ gleich $-\frac{h^2}{4}$ ist.

Für die inverse Funktion von $y = f(x)$, sie heiße $x = \varphi(y)$, wird ebenso[1]), wenn für $x = a$ $y = b$ und für $x = a + h$ $y = b + k$ ist:

[1]) wo hier das Vorkommen verschiedener Funktionszweige außer acht gelassen wird.

$$x = \varphi(b) + \frac{\varphi(b+k) - \varphi(b)}{k}(y - b) + \bar{R}(y) =$$

$$= a + \frac{h}{f(a+h) - f(a)}[f(x) - f(a)] + \bar{R}(y)$$

und hier ist

$$|\bar{R}(y)| < \frac{|\varphi''(\eta)|}{8}[f(a+h) - f(a)]^2,$$

wenn η einen mittleren Wert von y zwischen b und $b + k$ bezeichnet.

Ist nun $y = \log x$, so wird bekanntlich

$$|R(x)| < \frac{M}{8}\frac{1}{\xi^2} < \frac{1}{16\,\xi^2};$$

wenn also x zwischen 10 und 10^2 liegt, so wird der Fehler kleiner als $\frac{1}{16.10^2}$, wenn x zwischen 10^2 und 10^3 liegt, so wird der Fehler kleiner als $\frac{1}{16.10^4}$, und wenn x zwischen 10^3 und 10^4 liegt, so wird der Fehler kleiner als $\frac{1}{16.10^6}$.

Ist $x = 10^y$, so wird

$$\varphi'(y) = l\,10.10^y = \frac{10^y}{\log e} = \frac{10^y}{M},$$

wo

$$\frac{1}{M} = 2{\cdot}302\,58 \cdots < 2{\cdot}5$$

ist; und ferner wird

$$\varphi''(y) = \frac{10^y}{M^2},$$

wo

$$\frac{1}{M^2} < 6{\cdot}25$$

ist, und somit

$$|\bar{R}(y)| < \frac{6{\cdot}25}{8}10^{\eta}.[\log(a+h) - \log a]^2.$$

Wenn insbesondere $a = 10^3$, $h = 1$ ist, wird darum, weil in fünfstelligen Tafeln

$$\log 1001 = 3{\cdot}000\,43$$

ist,

$$|\bar{R}(y)| < \frac{6{\cdot}25}{8}\cdot 10^4 \cdot \left(\frac{43}{10^5}\right)^2 < \frac{15}{10^4},$$

und wenn $a = 10^2$, $h = 1$ ist, wird darum, weil

$$\log 101 = 2{\cdot}004\,32$$

gilt,

$$|\,\overline{R}(y)\,| < \frac{6{\cdot}25}{8} \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{432}{10^5}\right)^2 < \frac{15}{10^3}.$$

Will man nach Tafeln, wie denen von Jordan für die trigonometrischen Funktionen sinus und cosinus von Winkeln, die von zehn zu zehn Sekunden angegeben sind, in einem Intervalle von $h = 10''$ zur Berechnung eines Sinus linear interpolieren, so hat man dann, wenn etwa $a = 13^0\,37'\,40''$ ist,

$$\sin 13^0\,37'\,46'' =$$

$$= \sin 13^0\,37'\,40'' + \frac{6}{10}\,(\sin 13^0\,37'\,50'' - \sin 13^0\,37'\,40'') + R =$$

$$= 0{\cdot}235\,613\,3 + \frac{6}{10}\,\frac{471}{10^7} + R,$$

und hier gilt

$$|\,R\,| < \frac{1}{8}\,\sin 13^0\,37'.50''\,.\,h^2 = \frac{0{\cdot}235\,660\,4}{8}\,h^2,$$

doch muß h in Bogenmaß ausgedrückt werden, weil die anderen Größen in Längenmaß vorkommen.

Da nun einer Minute ein Bogen kleiner als $\frac{3}{10^4}$ zukommt, so wird

$$|\,R\,| < \frac{0{\cdot}235\,660\,4}{8}\left(\frac{3}{10^4}\right)^2 < \frac{1}{3\,.\,10^8}.$$

Will man den log sin eines zwischen 6^0 und 84^0 gelegenen Winkels aus einer fünfstelligen Tafel, wo $h = \left(\frac{1}{10}\right)'$ ist, entnehmen, so wird der Betrag des Fehlers bei der linearen Interpolation, indem

$$f''(\xi) = -\frac{M}{\sin^2 \xi},$$

aber der Sinus in dem genannten Intervalle größer als $\frac{1}{10}$ ist:

$$< \frac{1}{8}\,\frac{10^2}{2}\,h^2,$$

wo $h = \left(\frac{1}{10}\right)'$ wieder in Bogenmaß auszudrücken ist. Dann wird

$$|\,R\,| < \frac{1}{8} \cdot \frac{10^2}{2} \cdot \left(\frac{3}{10^4}\right)^2 < \frac{6}{10^7}.$$

Die Fehler von $\log \sin \alpha$ in dem Intervalle von $1^0 40'$ bis 6^0 ließen sich in ganz entsprechender Weise bestimmen. Ist aber α ein zwischen 0^0 und $1^0 40'$ liegender Winkel, den man in Minuten ausdrücke, so setzt man bei Angabe von

$$\log \frac{\sin \alpha}{\alpha} = S:$$

$$\log \sin \alpha = S + \log \alpha,$$

d. h. der Fehler von $\log \sin \alpha$ setzt sich aus dem von S und dem des Logarithmus eines Numerus α zusammen.

Die Fehlerbestimmung von log cos eines Winkels bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

Will man aber den Fehler bei der Berechnung von $\log \operatorname{tg} \alpha$, so beachte man, daß dann, wenn $6^0 \leqq \alpha \leqq 84^0$ ist,

$$|f''(\xi)| = 4 \cdot \left| \frac{M \cos 2\xi}{\sin^2 2\xi} \right| < 60$$

wird und also

$$|R(x)| < \frac{60}{8} \cdot \left(\frac{3}{10^4}\right)^2 < \frac{7}{10^7}$$

ist. —

Es ist nun zu erwägen, welchen Fehler man begeht, wenn man bei Übergang von $\log \sin \alpha = c$ zu α auch die lineare Interpolation verwendet.

Es ist jetzt

$$\sin \alpha = 10^c$$

und wenn man zuerst c berechnet, macht man einen Fehler, dessen Betrag kleiner als

$$\frac{6 \cdot 25}{8} \sin 84^0 \cdot \left(\frac{120}{10^5}\right)^2 < \frac{12}{10^7} = \varepsilon$$

wird, denn die Differenz der Logarithmen der Sinusse zweier um eine Minute verschiedener Winkel bleibt in dem Intervalle von 6^0 bis 84^0 kleiner als

$$\frac{120}{10^5}.$$

Geht man nun aber noch von $\sin \alpha = z$ zu $\alpha = \operatorname{arc} \sin z$, so macht man, weil, wie in den Jordanschen Tafeln zu lesen ist,

$$\sin(\alpha + 1) - \sin \alpha < \frac{483}{10^7}$$

gilt, einen Fehler, dessen Betrag kleiner bleibt als

$$\frac{1}{8}\left(\frac{483}{10^7}\right)^2 (\text{arc}\sin z)''_{z=\zeta} < \frac{3}{10^{10}}\left[\frac{z}{(\sqrt{1-z^2})^3}\right]_{z=\zeta}.$$

Es bleibt aber nahezu

$$\frac{z}{(\sqrt{1-z^2})^3} < 10^3,$$

darum wird der Betrag des Fehlers im allgemeinen auch kleiner als

$$\frac{3}{10^7} = \eta,$$

und der Fehler von α ist nun folgendermaßen zu untersuchen: Das Argument von arc sin ist eine Größe, die bis auf ε nicht genau bestimmt ist. Will man aber eine Gleichung

$$\alpha = \text{arc}\sin(a_0 + \varepsilon),$$

wo a_0 ein bestimmter Wert des früheren z sei, unter Hilfe der linearen Interpolation behandeln, so beachte man, daß in der auf S. 118 vorkommenden Formel für x, in der man x, y und φ der Reihe nach durch α, $a_0 + \varepsilon$ und arc sin zu ersetzen hat, bei kleinem k ein Fehler von α, abgesehen von η, höchstens gleich

$$3\,\text{arc}\sin(a_0 + \varepsilon) - 3\,\text{arc}\sin a_0$$

auftreten könne. Wenn man nun in diesem Ausdrucke mit Hilfe der Taylorschen Reihe nach Potenzen von ε entwickelt und höhere Potenzen von ε vernachlässigt, so wird der Fehler also höchstens:

$$3\,\varepsilon\left(\frac{d\,\text{arc}\sin z}{dz}\right)_{z=a_0} + \eta = \frac{3\,\varepsilon}{\sqrt{1-a_0^2}} + \eta\,[1]. -$$

Es soll nun auch noch der den bisher betrachteten Fehlern entsprechende in den Gaussschen Tafeln zur Berechnung des Logarithmus der Summe oder der Differenz zweier Zahlen a und b angegeben werden.

Es ist

$$\log(a+b) = \log a + \log\left(1 + \frac{1}{\frac{a}{b}}\right),$$

und wenn $\frac{a}{b} = c$ gesetzt wird, gilt:

---

[1]) In dieser oberen Grenze des Fehlers tritt der angegebene Quotient nur zweimal auf, wenn k nicht klein ist, aber dann tritt der Quotient aus ε und der Quadratwurzel aus $1 - (a_0 + k)^2$ hinzu.

$$\log\left(1+\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)=A=M\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{c^3}-\cdots\right).$$

Doch in den Tafeln findet man den Wert von A nicht c zugeordnet sondern

$$\log c=\log\frac{a}{b}=D$$

und darum wird

$$A=M\left(\frac{1}{10^D}-\frac{1}{2}\frac{1}{10^{2D}}+\cdots\right).$$

In den genannten Tafeln kommen die aufeinander folgenden D Werte in dem Abstande

$$h=\frac{1}{10^3}$$

vor; und wenn man zur Bestimmung von A zwischen solchen Werten linear interpoliert, begeht man einen Fehler R, so daß

$$|R|<\frac{1}{8}\frac{1}{10^6}\left|\frac{d^2}{dc^2}\log\left(1+\frac{1}{c}\right)\right|_{(\gamma)}=\frac{1}{8}\frac{M}{10^6}\left(\frac{|2c+1|}{c^2(c+1)^2}\right)_{(\gamma)},$$

wo γ einen mittleren Wert des Argumentes c bedeutet.

Ist z. B.

$$D=1{\cdot}701\,70,$$

so liegt $\frac{a}{b}$ zwischen 50·31 und 50·32, und weil

$$\frac{2c+1}{c^2(c+1)^2}$$

für den kleineren Wert von c größer ist, wird

$$|R|<\frac{1}{16\,.\,10^6}\;\frac{100{\cdot}62+1}{25\,.\,10^2}<\frac{1}{3\,.\,10^8}.$$

Von den Subtraktionslogarithmen gilt Folgendes: Es ist

$$\log(a-b)=\log a-\log\frac{a}{a-b}$$

und ferner

$$\log\frac{a}{a-b}=S=\log\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{a}{b}}}=-\log\left(1-\frac{1}{\frac{a}{b}}\right).$$

Man stellt danach S als Funktion von D dar.

Wenn $a - b$ wenig von a verschieden ist, so wird S nahezu null. Für $a = 2b$ aber wird

$$S = \log 2 = \log \frac{a}{b} = D.$$

Für wachsende D nimmt S ab, für abnehmende D nimmt S zu, also kann D auch die Rolle eines S übernehmen und umgekehrt S die Rolle eines D.

In der Tat wird dann, wenn man in S $\frac{a}{b}$ durch $\frac{a}{a-b}$ ersetzt

$$S = \log \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{a}{a-b}}} = \log \frac{a}{b} = D.$$

Man hat danach

$$\log(a - b) = \log a - S$$

oder

$$\log(a - b) = \log a - D,$$

je nachdem

$$\log \frac{a}{b} \gtrless \log 2 = 0{\cdot}301\,03$$

ist.

Ist beispielsweise

$$D = 1{\cdot}2055,$$

so findet man

$$S = 0{\cdot}0279 + 5\,(0{\cdot}027\,90 - 0{\cdot}027\,97) + R,$$

und hier wird, weil $\frac{a}{b}$ zwischen 16·05 und 16·06 liegt,

$$|\,R\,| < \frac{1}{8}\left(\frac{1}{10^3}\right)^2 \left[\frac{d^2}{d\,c^2} \log\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{c}}\right)\right]_{(\gamma)} <$$

$$< \frac{1}{16}\,\frac{1}{10^6}\left(\frac{2c - 1}{c^2(c-1)^2}\right)_{(\gamma)} < \frac{4}{10^{10}}.$$

Die Beträge der Fehler bei der inversen Aufgabe werden ebenfalls klein.

Gelegentlich machen wir noch eine Bemerkung zur Benützung der fünfstelligen Logarithmentafeln, die zwar nicht in diesen Rahmen paßt, aber deren Aufnahme hier durch Aussagen in den Einleitungen zu den Tafeln veranlaßt ist.

Früher war $a > b$ vorausgesetzt, damit bei der Bestimmung von $\log(a - b)$ das Argument vom Logarithmus in S positiv

bleibe. Der Logarithmus negativer Zahlen ist bekanntermaßen imaginär und zwar ist darum, weil unter dem Logarithmus einer Größe a in Beziehung auf die Basis e alle Lösungen der Gleichung

$$e^x = a$$

verstanden werden, unter dem Logarithmus von $-a$ ($a > 0$) in bezug auf die Basis e zu verstehen:

$$l \,|-a\,| + (2m+1)\,\pi i,$$

wo m eine positive oder negative ganze Zahl ist.

Trotzdem aber kann man auch mit Logarithmen negativer Zahlen in Rechnungen umgehen, die mit imaginären Größen nichts zu tun nehmen.

Ist z. B.

$$0{\cdot}456\,03^{3{\cdot}1415} = c$$

logarithmisch zu berechnen, so ist

$$\begin{aligned}\log c &= 3{\cdot}1415 \log 0{\cdot}456\,03 = 3{\cdot}1415\,(4{\cdot}658\,99 - 5) \\ &= 3{\cdot}1415\,(-\,0{\cdot}341\,01)\end{aligned}$$

und ferner

$$\begin{aligned}\log(\log c) &= \log 3{\cdot}1415 + \log(-\,0{\cdot}341\,01) = \\ &= \log 3{\cdot}1415 + \log 0{\cdot}341\,01 + (2m+1)\pi i = \\ &= 0{\cdot}497\,14 + 4{\cdot}532\,763 - 5 + (2m+1)\pi i = \\ &= 0{\cdot}029\,903 + (2m+1)\pi i,\end{aligned}$$

das aber ist der Logarithmus von $-\,1{\cdot}071\,28$ oder $0{\cdot}928\,72 - 2$, und jetzt ist nur mehr der Numerus von

$$\log c = 0{\cdot}928\,72 - 2$$

aufzusuchen. — Man erhält:

$$c = \frac{8{\cdot}4862}{10^2} = 0{\cdot}084\,862.$$

Zweite Abteilung.

Differenzenrechnung[1]).

§ 28. Die Differenzen verschiedener Ordnungen und die Differenzenquotienten.

Die Zähler der in der Newtonschen Näherungsformel vorkommenden Koeffizienten, nämlich

$$\Delta^\nu f(a) = f(a + \nu h) - \binom{\nu}{1} f(a + \overline{\nu - 1}\, h) + \cdots + (-1)^\nu f(a)$$

zeigen eine Bildungsweise, die beschrieben werden soll, weil sich daran eine Reihe wichtiger Betrachtungen anschließen läßt.

Legt man die Werte einer Funktion $f(x)$ an den $n + 1$ äquidistanten Stellen $a + \nu h$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots n$) vor:

$$f(a), \quad f(a + h), \quad \ldots \quad f(a + nh),$$

die gerade bei der Bildung der Koeffizienten in der Newtonschen Formel alle vorkamen, und subtrahiert man jeden Wert von dem folgenden

$$f(a + \nu h) - f(a + \overline{\nu - 1}\, h)$$

— und hier kann ν die Werte $1, 2, \ldots n$ annehmen —, so nennt man diese n Differenzen der $n + 1$ vorgelegten Funktionswerte die Differenzen erster Ordnung der Funktion $f(x)$ an den Stellen

$$a, \quad a + h, \quad \ldots \quad a + \overline{n - 1}\, h;$$

also insbesondere

$$f(a + h) - f(a)$$

die Differenz erster Ordnung von $f(x)$ an der Stelle a und

$$f(x + h) - f(x)$$

die Differenz erster Ordnung an der Stelle x.

---

[1]) Seliwanoff, Encyklopädie, Bd. I, S. 918, und „Lehrbuch der Differenzenrechnung" 1904.

Man bezeichnet die Differenz erster Ordnung an der Stelle

$$a + \overline{\nu - 1}\, h$$

mit

$$\Delta f(a + \overline{\nu - 1}\, h)$$

und bildet aus den Differenzen erster Ordnung für $\nu = 1, 2, \ldots \overline{n - 1}$ Differenzen, so wie früher die Differenzen aus den Funktionswerten, also

$$\Delta f(a + \nu h) - \Delta f(a + \overline{\nu - 1}\, h) = \Delta \Delta f(a + \overline{\nu - 1}\, h),$$

bezeichnet diese mit

$$\Delta^2 f(a + \overline{\nu - 1}\, h)$$

und nennt sie die Differenzen zweiter Ordnung von $f(x)$ an den Stellen

$$a + \overline{\nu - 1}\, h, \quad (\nu = 1, 2, \ldots \overline{n - 1}).$$

Es ist

$$\Delta^2 f(a) = \Delta f(a + h) - \Delta f(a) = [f(a + 2h) - f(a + h)] - \\ - [f(a + h) - f(a)] = f(a + 2h) - 2 f(a + h) + f(a),$$

und ebenso

$$\Delta^2 f(a + h) = f(a + 3h) - 2 f(a + 2h) + f(a + h)$$

usw.

Aus den $n - 1$ Differenzen der zweiten Ordnung bildet man die $n - 2$ Differenzen der dritten Ordnung:

$$\Delta^2 f(a + \nu h) - \Delta^2 f(a + \overline{\nu - 1}\, h) = \Delta \Delta^2 f(a + \overline{\nu - 1}\, h) = \\ = \Delta^3 f(a + \overline{\nu - 1}\, h), \quad (\nu = 1, 2, \ldots \overline{n - 2})$$

und man findet insbesondere

$$\Delta^3 f(a) = f(a + 3h) - 3 f(a + 2h) + 3 f(a + h) - f(a)$$

und

$$\Delta^3 f(a + h) = f(a + 4h) - 3 f(a + 3h) + 3 f(a + 2h) \\ - f(a + h)$$

usw.

Nehmen wir an, daß in entsprechender Weise gefunden sei:

$$\Delta^{n-1} f(a) = f(a + \overline{n - 1}\, h) - \binom{n - 1}{1} f(a + \overline{n - 2}\, h) + \cdots \\ + (-1)^{n-1} f(a),$$

so kann man durch den Schluß von einem Fall auf den nächsten zeigen, daß diese Formel allgemein gilt.

In der Tat sie besteht für $n = 1, 2, 3$, und unter der Annahme, daß sie im Falle $n - 1$ gelte, wird auch

$$\Delta^n f(a) = \Delta^{n-1} f(a+h) - \Delta^{n-1} f(a) =$$
$$= f(a+nh) - \binom{n}{1} f(a+\overline{n-1}\,h) + \cdots + (-1)^n f(a).$$

Und so können wir sagen, daß die Zähler der Koeffizienten in der Newtonschen Näherungsformel die aufeinander folgenden Differenzen von $f(x)$ an der Stelle a sind.

Als Beispiele seien die folgenden Sätze angeführt:

$$1.\quad \Delta[c f(x)] = c\Delta f(x),$$

wo c eine Konstante bedeutet;

$$2.\quad \Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x),$$

d. h. die Differenz einer Summe ist gleich der Summe der Differenzen der Summanden.

Wir bringen die bisher gebildeten Differenzen der ersten n Ordnungen von $f(x)$ in ein Schema und zwar schreiben wir in eine erste Kolonne die Funktionswerte an den gegebenen äquidistanten Stellen, in eine zweite Kolonne die ersten Differenzen, doch ordnen wir die einzelne so an, daß sie in eine Zeile zwischen die Funktionswerte zu stehen kommt, aus denen sie gebildet ist. In gleicher Weise schreiben wir in der dritten Kolonne die zweiten usw. in der $n$ten Kolonne die zwei $(n-1)$-sten Differenzen und in der $(n+1)$-sten Kolonne die $n$te Differenz an:

$$\begin{array}{llllll}
f(a) & & & & & \\
 & \Delta f(a) & & & & \\
f(a+h) & & \Delta^2 f(a) & & & \\
 & \Delta f(a+h) & & & & \\
f(a+2h) & & & \cdots & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \Delta^{n-1} f(a) & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & \Delta^n f(a) \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \Delta^{n-1} f(a+h) & \\
 & & & \cdots & & \\
f(a+\overline{n-2}\,h) & & & & & \\
 & \Delta f(a+\overline{n-2}\,h) & & & & \\
f(a+\overline{n-1}\,h) & & \Delta^2 f(a+\overline{n-2}\,h) & & & \\
 & \Delta f(a+\overline{n-1}\,h) & & & & \\
f(a+nh) & & & & &
\end{array}$$

Wollte man die $n$te Differenz von $f(x)$ außer an der Stelle a auch an der Stelle $(a+h)$ besitzen, so bedürfte man des Wertes der Funktion an einer weiteren $(n+2)$-ten Stelle $(a+\overline{n+1}\,h)$, dann der ersten Differenz an der Stelle $(a+nh)$ usw., endlich der $(n-1)$-sten Differenz an der Stelle $(a+2h)$ und dann findet man

$$\Delta^n f(a+h) = \Delta^{n-1} f(a+2h) - \Delta^{n-1} f(a+h).$$

Nehmen wir danach die schon einmal (s. S. 116) benützten Funktionswerte in dem gegenseitigen Abstande

$$h = \frac{5}{10^3}$$

auf

$$0{\cdot}896\,12, \quad 0{\cdot}910\,31, \quad 0{\cdot}922\,90, \quad 0{\cdot}934\,00,$$

so heißt das Schema folgendermaßen:

$$\begin{array}{llll}
0{\cdot}896\,12 & & & \\
 & 0{\cdot}014\,19 & & \\
0{\cdot}910\,31 & & -\,0{\cdot}001\,60 & \\
 & 0{\cdot}012\,59 & & 0{\cdot}000\,11 \\
0{\cdot}922\,90 & & -\,0{\cdot}001\,49 & \\
 & 0{\cdot}011\,10 & & \\
0{\cdot}934\,00 & & &
\end{array}$$

und man sieht aus diesem Täfelchen, wo h kleiner als eins ist, daß die Differenzen höherer Ordnung immer kleiner werden, was noch mehr auffiele, wenn h ein Bruchteil des letztbenützten wäre. Wir kommen auf diese Tatsache noch zu sprechen.

Man kann die Funktionswerte auch an den Stellen

$$a-h, \quad a-2h, \quad \ldots \quad a-nh$$

aufnehmen und die Differenzen bilden:

$$f(a-\overline{\nu-1}\,h) - f(a-\nu h) = \Delta f(a-\nu h) (\nu = 1, 2, \ldots n),$$

wobei der einem ersten Funktionswerte folgende der ist, in dem der Subtrahend des Argumentes von kleinerem Betrage ist.

Hierauf bildet man

$$\Delta f(a-\overline{\nu-1}\,h) - \Delta f(a-\nu h) = \Delta^2 f(a-\nu h)$$

usw., so daß das frühere Schema die folgende Erweiterung erfährt:

$$
\begin{array}{llll}
\vdots & & & \\
f(a-2h) & & & \\
 & \Delta f(a-2h) & & \\
f(a-h) & & \Delta^2 f(a-2h) \ldots & \\
 & \Delta f(a-h) & & \ldots \\
f(a) & & \Delta^2 f(a-h) \ \ldots & \\
 & \Delta f(a) & &
\end{array}
$$

Um neben dem früheren Teile des Schemas auch den neuen in einem besonderen Falle entstehen zu sehen, soll das Auftreten des einem Funktionswerte $f(a)$ anhaftenden Fehlers in den verschiedenen Differenzen verfolgt werden.

Wir setzen also voraus, daß die Funktionswerte

$$f(a \pm \nu h) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

keine Fehler hätten und verfolgen in dem Schema die Wirkung des Fehlers α von $f(a)$ bei der Bildung der verschiedenen Differenzen.

Es entsteht das Schema[1])

$$
\begin{array}{ccccc}
\cdot & & & & \\
\cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
0 & \cdot & \cdot & \vdots & \\
 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & & 0 & \cdot & \cdot \\
 & 0 & & 0 & \cdot \\
0 & & 0 & & \alpha \\
 & 0 & & \alpha & \\
0 & & \alpha & & -4\alpha \ldots \\
 & \alpha & & -3\alpha & \\
\alpha & & -2\alpha & & +6\alpha \ldots \\
 & -\alpha & & +3\alpha & \\
0 & & +\alpha & & -4\alpha \ldots \\
 & 0 & & -\alpha & \\
0 & & 0 & & +\alpha \quad . \\
 & 0 & & 0 & \cdot \\
0 & & 0 & \cdot & \cdot \\
 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & & & \\
\cdot & & & &
\end{array}
$$

[1]) Bruns, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens, 1903.

und man bemerkt, daß in der $(\nu+1)$-sten Vertikalreihe außer abwechselnden Zeichen die Binominalkoeffizienten $\binom{\nu}{\varkappa}$ bei α stehen; so muß es aber auch sein, denn man hat in der $(\nu+1)$-sten Vertikalreihe von oben nach unten gelesen einzig und allein die folgenden von null verschiedenen Differenzen stehen:

$$[\Delta^\nu z(x)]_{x=a-\mu h} =$$
$$\left[z(x+\nu h) - \binom{\nu}{1} z(x + \overline{\nu-1}\, h) + \cdots + (-1)^\nu z(x)\right]_{x=a-\mu h},$$
$$(\mu = \nu,\ \nu-1,\ \ldots\ 1,\ 0)$$

wo $z(x)$ der Fehler von $f(x)$ an der Stelle x sein soll. —

Wenn man unter h oder Δx ein nach null konvergierendes Inkrement der Variablen versteht, so wird

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \lim_{h=0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \left(\frac{d f(x)}{d x}\right)_{x=a};$$

und gesetzt, man hätte auch die Beziehungen gefunden:

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta^\nu f(a)}{h^\nu} = \left(\frac{d^\nu f(x)}{d x^\nu}\right)_{x=a} \quad [\nu = 2, 3, \ldots (n-1)],$$

so folgt

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta^n f(a)}{h^n} = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \frac{\Delta^{n-1} f(a+h) - \Delta^{n-1} f(a)}{h^{n-1}} =$$
$$= \left(\frac{d}{d x} \frac{d^{n-1} f(x)}{d x^{n-1}}\right)_{x=a} = \left(\frac{d^n f(x)}{d x^n}\right)_{x=a}.$$

Die Grenze des $n$ten Differenzenquotienten, d. h. der $n$ten Differenz dividiert durch die $n$te Potenz des Abstandes der äquidistanten Stellen a_ν, wird also gleich dem Werte des $n$ten Differentialquotienten an derselben Stelle a.

Hieraus folgt, daß die höheren Differenzen von $f(x)$ für ein h kleiner als eins mit der Ordnungszahl wirklich immer kleiner werden und zwar die νte Differenz von $f(a)$ in derselben Weise wie h^ν.

Nun aber ergibt sich bei dem Grenzübergange aus der Newtonschen Näherungsformel wieder die Taylorsche Formel:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}[a + \vartheta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Wendet man diese Taylorsche Formel auf eine Funktion $f(x)$ an allen Stellen $a + \nu h$ an, entwickelt also in dem Ausdrucke für die $n$te Differenz

$$\Delta^n f(a) = f(a + nh) - \binom{n}{1} f(a + \overline{n-1}\,h) + \cdots + (-1)^n f(a)$$

jedes der Glieder nach Potenzen von h, und beachtet, daß bei unendlich klein werdendem h die $n$te Differenz von $f(a)$ von derselben Ordnung unendlich klein wird wie h^n, so werden in dem Aggregate rechterhand die Koeffizienten von

$$h^0, \quad h^1, \quad h^2, \quad \ldots \quad h^{n-1}$$

gewiß null, und man erhält die Zahlenrelationen:

$$0 = \binom{n}{0} n^\mu - \binom{n}{1} (n-1)^\mu + \binom{n}{2} (n-2)^\mu - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} 1^\mu + (-1)^n \binom{n}{n} 0^\mu \; (\mu = 0, 1, \ldots n-1),$$

wo in dem Falle $\mu = 0$

$$0^0 = 1$$

zu setzen ist.

Darum, weil für ein Inkrement $h < 1$ die höheren Differenzen mit wachsender Ordnungszahl immer kleiner werden, kann man bei der Darstellung von $f(x)$ durch die Newtonsche Näherungsformel die Glieder höherer Ordnung näherungsweise fortlassen, aber auch das Restglied, denn der Wert der $(n + 1)$-sten Ableitung wird an einer mittleren Stelle ξ auch als Grenzwert des $(n + 1)$-sten Differenzenquotienten an derselben Stelle darzustellen sein.

Die m-fache Differentiation der Newtonschen Näherungsformel ergibt nun:

$$f^{(m)}(x) = \frac{\Delta^m f(a)}{m!\, h^m} \frac{d^m (x-a)(x-a-h) \ldots (x-a-\overline{m-1}\,h)}{dx^m} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{\Delta^n f(a)}{n!\, h^n} \frac{d^m (x-a)(x-a-h) \ldots (x-a-\overline{n-1}\,h)}{dx^m} +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \frac{d^m (x-a)(x-a-h) \ldots (x-a-nh)}{dx^m},$$

und wenn man hier x durch einen bestimmten Zahlenwert c ersetzt, aber die Werte der vorkommenden Differentialquotienten für $x = c$ der Reihe nach mit

$$A_m^{(m)}(c), \quad \ldots \quad A_{n+1}^{(m)}(c)$$

bezeichnet, so entsteht

$$f^{(m)}(c) =$$
$$= A_m^{(m)}(c)\,\frac{\Delta^m f(a)}{m!\,h^m} + \cdots + A_n^{(m)}(c)\,\frac{\Delta^n f(a)}{n!\,h^n} + A_{n+1}^{(m)}(c)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

also eine Formel, die zur näherungsweisen Angabe des $m$ten Differentialquotienten an der Stelle c dient, wenn die verschiedenen Differenzenquotienten von der $m$ten bis zur $n$ten Ordnung, die verschiedenen Zahlen $A^{(m)}$ und das Restglied bestimmbar sind.

Hier wollen wir die Formeln zur Differentiation in anderer Weise gewinnen. Wenn man in der Newtonschen Formel und zwar bei der Schreibweise (s. S. 115)

$$f(a + hz) = f(a) + \Delta f(a)\binom{z}{1} + \Delta^2 f(a)\binom{z}{2} + \cdots$$
$$+ \Delta^n f(a)\binom{z}{n} + f^{(n+1)}(a + h\xi)\,h^{n+1}\binom{z}{n+1}$$

rechterhand nach Potenzen von z ordnet und linkerhand nach der Taylorschen Formel entwickelt, so erhält man

$$f(a) + \frac{zh}{1}\left(\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right)_{x=a} + \frac{z^2h^2}{2!}\left(\frac{d^2 f(x)}{d\,x^2}\right)_{x=a} + \cdots$$
$$+ \frac{(zh)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(a + h\xi) =$$
$$= f(a) + z\left(\Delta f(a) - \frac{1}{2!}\Delta^2 f(a) + \frac{2}{3!}\Delta^3 f(a) - \right.$$
$$\left. - \frac{6}{4!}\Delta^4 f(a) + \cdots\right) +$$
$$+ z^2\left(\frac{1}{2!}\Delta^2 f(a) - \frac{3}{3!}\Delta^3 f(a) + \frac{11}{4!}\Delta^4 f(a) - \cdots\right) +$$
$$+ z^3\left(\frac{1}{3!}\Delta^3 f(a) - \frac{6}{4!}\Delta^4 f(a) + \cdots\right) +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und der Vergleich gleich hoher Potenzen von z liefert die Formeln:

$$h\left(\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right)_{x=a} = \Delta f(a) - \frac{1}{2!}\Delta^2 f(a) + \frac{2}{3!}\Delta^3 f(a) - \frac{6}{4!}\Delta^4 f(a) + \cdots$$
$$\frac{h^2}{2!}\left(\frac{d^2 f(x)}{d\,x^2}\right)_{x=a} = \frac{1}{2!}\Delta^2 f(a) - \frac{3}{3!}\Delta^3 f(a) + \frac{11}{4!}\Delta^4 f(a) - \cdots$$
$$\frac{h^3}{3!}\left(\frac{d^3 f(x)}{d\,x^3}\right)_{x=a} = \frac{1}{3!}\Delta^3 f(a) - \frac{6}{4!}\Delta^4 f(a) + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

deren Schlußglieder hier nicht angeschrieben sind.

Diese Formeln heißen die der mechanischen Differentiation und in dieser Form dienen sie zur näherungsweisen Herstellung der Ableitungen einer Funktion $f(x)$; doch zu der der Ableitungen einer Abhängigkeit nur dann, wenn unter diesen eben die Größen verstanden werden, die durch die letzten Formeln definiert sind. Und in diesem beschränkten Sinne ist hier über die Aussage im § 22 hinausgegangen.

Es wäre auch möglich, die Ableitungen dann näherungsweise auszudrücken, wenn bei der Bildung der Differenzen die Funktionswerte zu beiden Seiten einer Stelle benützt werden.

§ 29. Bestimmung von Werten ganzer Funktionen.

Früher sahen wir, daß die Differenzen einer Funktion bei kleinem h ausreichen, um die höheren Differentialquotienten näherungsweise anzugeben und also auch mit Benützung der Taylorschen Formel ausreichen, den Funktionswert an einer neuen Stelle zu berechnen. Ist aber $f(x)$ insbesondere eine ganze rationale Funktion

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

— wir nennen sie $g(x)$ — so kann man den Funktionswert sogar im Falle eines beliebigen Zuwachses h bestimmen.

Es ergibt sich nämlich leicht, daß die $n$te Differenz der ganzen Funktion $n$ten Grades einer Konstanten gleich kommt, und darauf wird die Behauptung sich erweisen lassen.

In der Tat es ist jetzt die erste Differenz an der Stelle x $\Delta g(x)$ eine ganze rationale Funktion vom $(n-1)$-sten Grade mit dem Gliede der höchsten Dimension:

$$x^{n-1}\, n\, a_0\, h.$$

Dann ist die zweite Differenz an der Stelle x eine ganze Funktion vom Grade $n-2$ und das Glied höchster Dimension heißt:

$$n(n-1)\, a_0\, h^2 x^{n-2}$$

usw., endlich die $n$te Differenz ist nur vom nullten Grade, d. h. eine Konstante, und zwar

$$n!\; a_0\; h^n.$$

Besitzt man nun eine ganze Funktion $g(x)$ an den n äquidistanten Stellen

$$a, \quad a+h, \quad \ldots \quad a+\overline{n-1}\,h,$$

und berechnet die Differenzen erster, zweiter, schließlich $(n-1)$-ster Ordnung bzw. an den ersten $n-1$ dieser Stellen, an den ersten $n-2$ Stellen usw. endlich an der einzigen Stelle a, so kann man $g(x)$ an der Stelle $a+nh$, darum weil die $n$te Differenz von $g(x)$ konstant ist, durch bloße Additionen berechnen.

Es ist ja

$$\begin{aligned}
&\Delta^{n-1} g(a+h) - \Delta^{n-1} g(a) = n!\, a_0 h^n, \\
&\Delta^{n-2} g(a+2h) - \Delta^{n-2} g(a+h) = \Delta^{n-1} g(a+h), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&g(a+nh) - g(a+\overline{n-1}\,h) = \Delta g(a+\overline{n-1}\,h)
\end{aligned}$$

und man ersieht, wie man der Reihe nach

$$\Delta^{n-1} g(a+h), \quad \Delta^{n-2} g(a+2h), \quad \ldots \quad g(a+nh)$$

berechnen kann.

In dem Falle der ganzen Funktion

$$g(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 2$$

findet man

$$g(0) = 2, \quad g(1) = -1, \quad g(2) = -2,$$

also

$$\Delta g(0) = -3, \quad \Delta g(1) = -1, \quad \Delta^2 g(0) = 2$$

und ferner ist

$$\Delta^3 g(x) = 3! = 6.$$

Danach wird

$$\begin{aligned}
\Delta^2 g(1) &= \Delta^2 g(0) + \Delta^3 g(0) = 2 + 6 = 8, \\
\Delta\, g(2) &= \Delta\, g(1) + \Delta^2 g(1) = -1 + 8 = 7, \\
g(3) &= g(2) + \Delta\, g(2) = -2 + 7 = 5,
\end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned}
\Delta^2 g(-1) &= \Delta^2 g(0) - \Delta^3 g(-1) = 2 - 6 = -4, \\
\Delta\, g(-1) &= \Delta\, g(0) - \Delta^2 g(-1) = -3 + 4 = 1, \\
g(-1) &= g(0) - \Delta\, g(-1) = 2 - 1 = 1
\end{aligned}$$

und endlich

$$\begin{aligned}
\Delta^2 g(-2) &= \Delta^2 g(-1) - \Delta^3 g(-2) = -4 - 6 = -10, \\
\Delta\, g(-2) &= \Delta\, g(-1) - \Delta^2 g(-2) = 1 + 10 = 11, \\
g(-2) &= g(-1) - \Delta\, g(-2) = 1 - 11 = -10.
\end{aligned}$$

Man kann also die Werte der gegebenen ganzen Funktion dritten Grades an neuen, von 0, 1 und 2 verschiedenen Stellen durch bloße Addition und Subtraktion bestimmen und sieht hier insbesondere, daß die ganze Funktion bei dem Übergange der Variablen von dem Werte -2 nach -1 und von 2 nach 3,

ebenso wie bei dem von 0 nach 1 das Zeichen wechselt, daß also die ganze Funktion dritten Grades als stetige Funktion in jedem der genannten Intervalle eine reelle Wurzel besitzt. —

Es soll noch der Beginn zur tabellarischen Festlegung der Werte von x^5 an den ganzen Zahlen zugehörigen Stellen durchgeführt werden.

Es ist x^5 für

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

der Reihe nach

$$0,\quad 1,\quad 32,\quad 243,\quad 1024,$$

und man findet

$$(\varDelta x^5)_0 = 1,\ (\varDelta x^5)_1 = 31,\ (\varDelta x^5)_2 = 211,\ (\varDelta x^5)_3 = 781,$$
$$(\varDelta^2 x^5)_0 = 30,\ (\varDelta^2 x^5)_1 = 180,\ (\varDelta^2 x^5)_2 = 570,$$
$$(\varDelta^3 x^5)_0 = 150,\ (\varDelta^3 x^5)_1 = 390,$$
$$(\varDelta^4 x^5)_0 = 240,$$
$$(\varDelta^5 x^5) = 120,$$

und nun

$$\begin{aligned}
(\varDelta^4 x^5)_1 &= 120 + 240 = 360,\\
(\varDelta^3 x^5)_2 &= 360 + 390 = 750,\\
(\varDelta^2 x^5)_3 &= 750 + 570 = 1320,\\
(\varDelta\ x^5)_4 &= 1320 + 781 = 2101,\\
(x^5)_5 &= 2101 + 1024 = 3125
\end{aligned}$$

usw.

Setzt man voraus, daß eine ganze rationale Funktion $g(x)$ in dem Intervalle von α bis $\alpha + 1$ eine einfache Nullstelle besitze, wo α eine ganze Zahl sei, und daß man auch $g(\alpha)$ samt den n ersten Differenzen von $g(x)$ an der Stelle α kenne, so erreicht man aus $g(x)$ durch die Substitution $x = z + \alpha$ eine Funktion $\gamma(z)$, die in dem Intervalle von 0 bis 1 eine einfache Nullstelle hat und deren erste n Differenzen an der Stelle null bekannt sind. Da entsteht nun die Aufgabe, $\gamma(z)$ an den Stellen

$$z = \frac{m}{10} \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots\ 9)$$

anzugeben und nachzusehen, in welchem neuen Intervalle $\gamma(z)$ sein Zeichen wechselt.

Zu diesem Zwecke setze man nach der Newtonschen Näherungsformel

$$\gamma(z) = g(\alpha) + \binom{z}{1}\varDelta g(\alpha) + \binom{z}{2}\varDelta^2 g(\alpha) + \cdots + \binom{z}{n}\varDelta^n g(\alpha),$$

und bestimme diesen Ausdruck für die genannten z Werte. Da-

mit kommt man dazu, auch im Falle

$$h = \frac{1}{10}$$

die ersten zehn Differenzen von $\gamma(z)$ an der Stelle $z = 0$ berechnen zu können.

So wird man auch vorgehen, wenn man eine Tafel in eine andere verwandeln soll, wo der Abstand der äquidistanten Stellen verkleinert ist, und die lineare Interpolation für die kleineren Teilintervalle angewandt werden soll.

§ 30. Die aus ungenauen Tafelwerten entspringenden Fehler.

Jetzt vermag man auch den Fehler zu bestimmen, der der Benützung ungenauer Tafelwerte entspringt. Man sucht einen solchen Fehler mit Hilfe der Newtonschen Näherungsformel auf, nachdem die in jeder Tafel vorkommenden Funktionswerte äquidistanten Stellen zugehören.

Ist jeder der Funktionswerte von $f(x)$ an den $n+1$ äquidistanten Stellen

$$a + \nu h \quad (\nu = 0, 1, \dots n)$$

mit einem absoluten Fehler nicht größer als

$$\delta \leqq \frac{1}{10^m}$$

behaftet, dann wird der absolute Fehler von $\Delta f(x)$ an der Stelle a nicht größer als

$$2\delta \leqq \frac{2}{10^m},$$

der von $\Delta^2 f(a)$ nicht größer als

$$2^2 \delta \leqq \frac{2^2}{10^m}$$

usw., der von $\Delta^n f(a)$ nicht größer als

$$2^n \delta \leqq \frac{2^n}{10^m},$$

weil

$$1 + \binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{2} + \cdots + \binom{\nu}{\nu} = (1+1)^\nu = 2^\nu$$

ist.

Danach haftet der Newtonschen Näherungsfunktion an der Stelle $x = a + kh$, wo k eine ganze Zahl $\leqq n$ sei, ein Fehler an, der nicht größer als

$$\delta\left[1 + 2\binom{k}{1} + 2^2\binom{k}{2} + \cdots + 2^k\binom{k}{k}\right]$$

ist. Doch diesen Ausdruck für eine obere Grenze des Fehlers hat man zu verändern, wenn statt der absoluten Fehler nur immer positive Fehler in den Tafelwerten vorausgesetzt werden, was wir hier aber nicht tun.

Zur Bestimmung der oberen Grenze des Fehlers einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x kommt also zu dem früheren Restgliede

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-nh)$$

unter der früheren Annahme über die Fehler der Tafelwerte noch eine Größe hinzu, die nicht größer ist als

$$\delta\left[1 + 2\,\frac{x-a}{h\,1!} + 2^2\,\frac{(x-a)(x-a-h)}{h^2\,2!} + \cdots \right.$$
$$\left. + 2^n\,\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h)}{h^n\,n!}\right].$$

Danach ist also der Fehler, der den Werten des Logarithmus in fünfstelligen Tafeln bei der linearen Interpolation anhaftet, wenn a zwischen 10^2 und 10^3 liegt, an der Stelle x nicht größer als

$$\left(\frac{1}{10^5} + \frac{2}{10^5}\,\frac{x-a}{h}\right) + \frac{1}{16}\,\frac{1}{10^4} < \frac{3}{10^5} + \frac{1}{16 \cdot 10^4} = \frac{3625}{10^8},$$

weil $h = 1$ und $x - a \leqq 1$ ist (s. S. 118).

Ebenso ist auch der den ungenauen Tafelwerten entspringende Fehler bei der Ermittelung des Numerus eines Logarithmus zwischen 3 und 3·000 43 nicht größer als

$$\frac{3}{10^5},$$

also der Fehler bei der linearen Interpolation

$$< \frac{3}{10^5} + \frac{15}{10^4} = 0{\cdot}001\,53$$

usw. (s. S. 118).

Hier soll nur noch eine obere Grenze des den fehlerhaften Tafelwerten zukommenden Fehlers bei der Berechnung von

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1\cdot 26} e^{-t^2}\,d\,t$$

bestimmt werden (s. S. 115).

Es ist

$$\delta \leqq \frac{1}{10^5},$$

also darum der verlangte Fehler für $x = 1{\cdot}26$, weil $a = 1{\cdot}15$ und $h = 0{\cdot}05$ war,

$$< \frac{1}{10^5}\cdot\left(1 + 2\,\frac{11}{5} + 4\,\frac{11\,.\,6}{2!\,5^2} + 8\,\frac{11\,.\,6\,.\,1}{3!\,5^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{10^5}\,(1 + 4{\cdot}4 + 5{\cdot}28 + 0{\cdot}704) = \frac{11\,384}{10^5},$$

und so ergibt sich der frühere Wert

$$f(1{\cdot}26) = 0{\cdot}925\,235\,68$$

nur bis auf vier Dezimalstellen genau.

Dritte Abteilung.

Die ganze Interpolationsfunktion zweier Variablen[1]).

---

§ 31. Die ganze rationale Funktion als Näherungsfunktion und ihr Restglied.

Jetzt soll auch eine Funktion $f(x, y)$ der zwei voneinander unabhängigen Variablen x und y mit einer ganzen rationalen Funktion $g(x, y)$ als Näherungsfunktion in Verbindung gesetzt werden, damit es später gelinge, die Kubatur näherungsweise zu vollziehen.

Das einzige in den Grundlehren der höheren Analysis immer wieder vorkommende und hierher gehörende Beispiel betrifft die Angabe einer ganzen Funktion $g(x, y)$, die an einer Stelle (a, b)

---

[1]) Biermann, Monatsh. f. Math. u. Physik, Jahrg. XIV.

den Wert annimmt, den eine vorgegebene Funktion $f(x, y)$ dort besitzt, und deren partielle Ableitungen von den ersten n Ordnungen an der Stelle (a, b) dieselben Werte haben wie daselbst die gleichnamigen Ableitungen von $f(x, y)$; und es ist

$$g(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)}(x-a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)}(y-b)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(ab)}(x-a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(ab)}(y-b)\right]^{(2)} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(ab)}(x-a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(ab)}(y-b)\right]^{(n)},$$

wo

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(ab)}(x-a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(ab)}(y-b)\right]^{(\nu)},$$

die symbolisch zu nehmende νte Potenz des Klammerausdruckes ist, so daß also

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\varkappa}_{(ab)}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{\nu-\varkappa}_{(ab)}$$

gleichbedeutend ist mit

$$\left(\frac{\partial^{\nu} f}{\partial x^{\varkappa}\,\partial y^{\nu-\varkappa}}\right)_{(a,b)}.$$

Dann ist, wie der Taylorsche Satz für Funktionen zweier Variablen aussagt:

$$f(x, y) = g(x, y) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b)\right]^{(n+1)}_{[a+\vartheta(x-a),\, b+\vartheta(y-b)]},$$

womit angezeigt sein soll, daß in der symbolisch zu nehmenden $(n+1)$-sten Potenz des Klammerausdruckes die Ableitungen nicht an der Stelle (a, b), sondern an der Stelle

$$[a + \vartheta(x-a),\, b + \vartheta(y-b)]$$

zu bilden sind.

Hier soll es zunächst die Aufgabe sein, die ganze rationale Funktion $m$ter Ordnung, die $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ Glieder hat, nämlich die Funktion der Form:

$$g(x, y) = c_{00} + (c_{10}x + c_{01}y) + \cdots$$
$$+ (c_{m0}x^m + c_{m-1\,1}x^{m-1}y + \cdots + c_{0m}y^m)$$

dann, wenn sie an den $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ Stellen

$$\begin{array}{l}(a_0 b_0),\quad (a_1 b_0),\quad \dots\quad (a_{m-1} b_0),\quad (a_m b_0),\\ (a_0 b_1),\quad (a_1 b_1),\quad \dots\quad (a_{m-1} b_1),\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ (a_0 b_{m-1}),\quad (a_1 b_{m-1}),\\ (a_0 b_m)\end{array}$$

der Reihe nach die Werte

$$\begin{array}{l}\eta_{00},\quad \eta_{10},\quad \dots\quad \eta_{m-1\,0},\quad \eta_{m0},\\ \eta_{01},\quad \eta_{11},\quad \dots\quad \eta_{m-1\,1},\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \eta_{0\,m-1},\quad \eta_{1\,m-1},\\ \eta_{0m}\end{array}$$

annimmt, in der Gestalt anzugeben:

$$\begin{aligned} g(x,y) = A_{00} &+ A_{10}(x-a_0) + A_{20}(x-a_0)(x-a_1) + \cdots \\ &+ A_{m0}(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{m-1}) + \\ &+ (y-b_0)\,[A_{01} + A_{11}(x-a_0) + \cdots \\ &+ A_{m-1,1}(x-a_0)\dots(x-a_{m-2})] + \\ &+ (y-b_0)(y-b_1)\,[A_{02} + A_{12}(x-a_0) + \cdots \\ &+ A_{m-2,2}(x-a_0)\dots(x-a_{m-3})] + \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ &+ (y-b_0)(y-b_1)\dots(y-b_{m-1})\,A_{0m}. \end{aligned}$$

Wenn man hier alle Wertepaare (a_μ, b_ν) einsetzt, wo $\mu + \nu \leqq m$ ist, so erhält man Gleichungen in den Koeffizienten A:

$$\begin{aligned} \eta_{00} &= A_{00},\\ \eta_{10} &= A_{00} + A_{10}(a_1-a_0),\\ \eta_{01} &= A_{00} + A_{01}(b_1-b_0),\\ \eta_{11} &= A_{00} + A_{10}(a_1-a_0) + A_{01}(b_1-b_0) + A_{11}(b_1-b_0)(a_1-a_0),\\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

und deren Auflösung gibt entsprechend wie im § 24

$$A_{\varkappa\lambda} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varkappa}\sum_{\beta=1}^{\beta=\lambda} \frac{f(a_\alpha, b_\beta)}{(a_\alpha-a_0)\dots/_{(\alpha)}\dots(a_\alpha-a_\varkappa).(b_\beta-b_0)\dots/_{(\beta)}\dots(b_\beta-b_\lambda)}.$$

Man bildet diese Darstellungen, wenn man zunächst die ganze Funktion vom $m$ten Grade in x $g(x, b_0)$ angibt, die an

den Stellen $(a_0 b_0)$, $(a_1 b_0)$, ... $(a_m b_0)$ die vorgegebenen Werte

$$\eta_{\mu 0} \quad (\mu = 0, 1, \ldots m)$$

annimmt, dann die Funktion $g(x, b_1)$ bestimmt, die an den Stellen $(a_0 b_1)$, $(a_1 b_1)$, ... $(a_{m-1} b_1)$ die $g(x, y)$ daselbst vorgeschriebenen Werte annimmt usw.

Insbesondere wird die ganze Funktion von der zweiten Ordnung, die an den sechs Stellen

$$\begin{array}{lll} a_0 b_0, & a_1 b_0, & a_2 b_0, \\ a_0 b_1, & a_1 b_1, & \\ a_0 b_2 & & \end{array}$$

die Werte

$$\begin{array}{lll} \eta_{00}, & \eta_{10}, & \eta_{20}, \\ \eta_{01}, & \eta_{11}, & \\ \eta_{01} & & \end{array}$$

annimmt, die folgende:

$$\begin{aligned} g(x, y) = \eta_{00} &+ \left(\frac{\eta_{00}}{a_0 - a_1} + \frac{\eta_{10}}{a_1 - a_0}\right)(x - a_0) + \\ &+ \left(\frac{\eta_{00}}{b_0 - b_1} + \frac{\eta_{01}}{b_1 - b_0}\right)(y - b_0) + \\ &+ \left[\frac{\eta_{00}}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + \frac{\eta_{10}}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)} + \right. \\ &\left. + \frac{\eta_{20}}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)}\right](x - a_0)(x - a_1) + \\ &+ \left[\frac{\eta_{00}}{(a_0 - a_1)(b_0 - b_1)} + \frac{\eta_{01}}{(a_0 - a_1)(b_1 - b_0)} + \right. \\ &\left. + \frac{\eta_{10}}{(a_1 - a_0)(b_0 - b_1)} + \frac{\eta_{11}}{(a_1 - a_0)(b_1 - b_0)}\right](x - a_0)(y - b_0) + \\ &+ \left[\frac{\eta_{00}}{(b_0 - b_1)(b_0 - b_2)} + \frac{\eta_{01}}{(b_1 - b_0)(b_1 - b_2)} + \right. \\ &\left. + \frac{\eta_{02}}{(b_2 - b_0)(b_2 - b_1)}\right](y - b_0)(y - b_1). \end{aligned}$$

Soll aber eine Funktion $f(x, y)$ näherungsweise durch die ganze rationale Funktion der $m$ten Ordnung $g(x, y)$ ersetzt werden, für die

$$\eta_{\mu\nu} = f(a_\mu, b_\nu)$$

ist, so gilt für $f(x, y)$ die Darstellung

$$f(x, y) = g(x, y) + R(x, y),$$

wo das hier aufgenommene Restglied wegen der jetzt $g(x, y)$ auferlegten Eigenschaften die Form hat:

$$\begin{aligned} R(x, y) = {} & C_0(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_m) + \\ & + C_1(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{m-1})(y-b_0) + \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + C_{m+1}(y-b_0)(y-b_1)\dots(y-b_m), \end{aligned}$$

aber hier die $m+2$ Größen C von den x und y freie Größen bedeuten.

Um diese Größen C zu bestimmen, bilde man

$$x = x_0 + h, \qquad y = y_0 + k$$

setzend die Funktion

$$f(x_0 + ht, y_0 + kt) = U(t)$$

und suche also deren Rest für $t = 1$.

Weil nun aber die ganze Funktion $m$ten Grades von t

$$g(x_0 + ht, y_0 + kt) = u(t)$$

für m t Werte verschwindet, so wird nach früheren Aussagen

$$U(t) = u(t) + \frac{1}{(m+1)!}\left[U^{(m+1)}(t)\right]_{t=\tau},$$

wo τ einen zwischen den Nullstellen von $u(t)$ und t selbst liegenden mittleren t Wert bezeichnet. Und ferner ist

$$U^{(m+1)}(t) = (m+1)!\,(C_0 h^{m+1} + C_1 h^m k + \cdots + C_{m+1} k^{m+1});$$

aber es gilt auch

$$U^{(m+1)}(t) = \left[\frac{\partial U}{\partial(x_0+ht)}\frac{d(x_0+ht)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial(y_0+kt)}\frac{d(y_0+kt)}{dt}\right]^{(m+1)};$$

und indem

$$\frac{\partial U}{\partial x_0} = \frac{\partial U}{\partial(x_0+ht)}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y_0} = \frac{\partial U}{\partial(y_0+kt)}$$

und umgekehrt ist, so wird

$$\begin{aligned} U^{(m+1)}(t) &= \left(\frac{\partial U}{\partial x_0} h + \frac{\partial U}{\partial y_0} k\right)^{(m+1)} = \\ &= \frac{\partial^{m+1} U}{\partial x_0^{m+1}} h^{m+1} + \binom{m+1}{1}\frac{\partial^{m+1} U}{\partial x_0^m \partial y_0} h^m k + \cdots \\ &\quad + \binom{m+1}{m+1}\frac{\partial^{m+1} U}{\partial y_0^{m+1}} k^{m+1}. \end{aligned}$$

Nun aber wird bei dem Vergleiche der gleichnamigen Glieder in den Ausdrücken für $U^{(m+1)}(t)$

$$C_0 = \frac{1}{(m+1)!}\left[\frac{\partial^{m+1} f(x, y)}{\partial x^{m+1}}\right]_{(\xi, \eta)},$$

$$C_1 = \frac{1}{(m+1)!}\binom{m+1}{1}\left[\frac{\partial^{m+1} f(x, y)}{\partial x^{m}\partial y}\right]_{(\xi, \eta)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!}\binom{m+1}{m+1}\left[\frac{\partial^{m+1} f(x, y)}{\partial y^{m+1}}\right]_{(\xi, \eta)},$$

wo ξ und η Werte zwischen $a_0, a_1, \ldots a_m$ und x beziehungsweise zwischen $b_0, b_1, \ldots b_m$ und y bedeuten.

§ 32. Die verallgemeinerte Newtonsche Näherungsfunktion.

Von den Formeln des letzten Paragraphen ausgehend findet man nun leicht die Verallgemeinerung der Newtonschen Näherungsformel.

In der Tat setzt man

$$\begin{matrix} a_0 = a, & a_\mu = a + \mu h, \\ b_0 = b, & b_\nu = b + \nu k, \end{matrix} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots m)$$

und führt auch die „Differenzen" ein:

$$f(x+h, y) - f(x, y) = \Delta^{1+0} f(x, y),$$
$$f(x, y+k) - f(x, y) = \Delta^{0+1} f(x, y),$$
$$[f(x+h, y+k) - f(x, y+k)] -$$
$$- [f(x+h, y) - f(x, y)] = \Delta^{1+1} f(x, y)$$

usw., so lassen sich die Koeffizienten $A_{\mu\nu}$ in dem Ausdrucke für die ganze Funktion $m$ter Ordnung, die an den äquidistanten Stellen (a_μ, b_ν) die Werte

$$f(a_\mu, b_\nu)$$

annimmt, folgendermaßen darstellen:

$$A_{\mu\nu} = \frac{\Delta^{\mu+\nu} f(a, b)}{\mu!\, \nu!\, h^\mu k^\nu}.$$

Damit erhält die erweiterte Newtonsche Formel die Gestalt:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{x-a}{h} \Delta^{1+0} f(a, b) + \frac{y-b}{k} \Delta^{0+1} f(a,b) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{(x-a)(x-a-h)}{h^2} \Delta^{2+0} f(a, b) + \right.$$

$$+ 2\frac{(x-a)(y-b)}{hk} \Delta^{1+1} f(a, b) +$$

$$\left. + \frac{(y-b)(y-b-k)}{k^2} \Delta^{0+2} f(a, b)\right) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{m!}\left[\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{m-1}\,h)}{h^m} \Delta^{m+0} f(a, b) + \right.$$

$$+ \binom{m}{1}\frac{(x-a)\ldots(x-a-\overline{m-2}\,h)(y-b)}{h^{m-1}k} \cdot \Delta^{(m-1)+1} f(a,b) + \cdots$$

$$\left. + \binom{m}{m}\frac{(y-b)(y-b-k)\ldots(y-b-\overline{m-1}\,k)}{k^m} \Delta^{0+m} f(a, b)\right] +$$

$$+ R(x, y),$$

wo der Rest nach den früheren Aussagen in der Form auszudrücken ist

$$R(x, y) =$$

$$\frac{1}{(m+1)!}\left\{\left(\frac{\partial^{m+1} f(x, y)}{\partial^{\,m+1}}\right)_{(\xi,\eta)} (x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-mh) + \right.$$

$$+ \binom{m+1}{1}\left(\frac{\partial^{m+1} f(x y)}{\partial x^m \partial y}\right)_{(\xi,\eta)} (x-a)\ldots(x-a-\overline{m-1}\,h)(y-b) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left. + \binom{m+1}{m+1}\left(\frac{\partial^{m+1} f(x,y)}{\partial y^{m+1}}\right)_{(\xi,\eta)} (y-b)(y-b-k)\ldots(y-b-mk)\right\}$$

und jetzt ξ und η mittlere Werte für x und y zwischen a, $a+mh$ und x beziehungsweise zwischen b, $b+mk$ und y bezeichnen.

§ 33. Verallgemeinerung der Lagrangeschen Formel.

Es soll auch noch die Lagrangesche Interpolationsformel auf den Fall von ganzen Funktionen zweier Variablen x und y ausgedehnt werden.

Es handle sich zunächst um eine ganze Funktion erster Ordnung $g(x, y)$, die bestimmt wird, indem man ihre Werte η_{00}, η_{10} und η_{01} an bloß drei Stellen (a_0, b_0), (a_1, b_0), (a_0, b_1) festsetzt.

Der Wert an der vierten Stelle (a_1, b_1), der schon durch die früheren Funktionswerte mit bestimmt ist, heiße η_{11}.

Weil die verlangte Funktion die Variable x nur im ersten Grade enthält und für $x = a_0$ und die unbestimmt gelassene Variable y in $g(a_0, y)$, aber für $x = a_1$ und bei unbestimmt gelassener Variablen y in $g(a_1, y)$ übergehen soll, so wird

$$g(x, y) = g(a_0, y)\,\frac{x - a_1}{a_0 - a_1} + g(a_1, y)\,\frac{x - a_0}{a_1 - a_0}.$$

Weil ferner $g(x, y)$ auch eine ganze Funktion ersten Grades in y sein soll, die die früher genannten Eigenschaften besitzt, so hat man zu setzen:

$$g(a_\mu, y) = \eta_{\mu,0}\,\frac{y - b_1}{b_0 - b_1} + \eta_{\mu,1}\,\frac{y - b_0}{b_1 - b_0} \quad (\mu = 0, 1)$$

und muß verlangen, daß in dem Ausdrucke

$$\eta_{00}\,\frac{x - a_1}{a_0 - a_1}\,\frac{y - b_1}{b_0 - b_1} + \eta_{10}\,\frac{x - a_0}{a_1 - a_0}\,\frac{y - b_1}{b_0 - b_1} +$$
$$+ \eta_{01}\,\frac{x - a_1}{a_0 - a_1}\,\frac{y - b_0}{b_1 - b_0} + \eta_{11}\,\frac{x - a_0}{a_1 - a_0}\,\frac{y - b_0}{b_1 - b_0}$$

ein Glied zweiter Dimension nicht vorkomme; das tritt ein, wenn

$$\eta_{00} - \eta_{01} = \eta_{10} - \eta_{11}$$

ist. Läßt man also diese Relation bestehen, so hat man in dem früheren Ausdrucke eine ganze Funktion ersten Grades $g(x, y)$ von den verlangten Eigenschaften und zwar in einer der Lagrangeschen Interpolationsfunktion einer Variablen nachgebildeten Gestalt.

Will man auch die ganze Funktion zweiten Grades $g(x, y)$ in entsprechender Form, so hat man nur zu verlangen, daß in dem Ausdrucke

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=2}\sum_{\nu=0}^{\nu=2} \eta_{\mu\nu}\,\frac{(x - a_{\mu-1})(x - a_{\mu+1})(y - b_{\nu-1})(y - b_{\nu+1})}{(a_\mu - a_{\mu-1})(a_\mu - a_{\mu+1})(b_\nu - b_{\nu-1})(b_\nu - b_{\nu+1})},$$

wo

$$a_{-1} \equiv a_2, \quad a_3 \equiv a_0, \qquad b_{-1} \equiv b_2, \quad b_3 \equiv b_0$$

sein soll, Glieder von höherer als der zweiten Dimension nicht auftreten. Das wird der Fall, wenn zwischen den neun Größen $\eta_{\mu\nu}$ in dem letzten Ausdrucke die drei Relationen bestehen:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=2} \sum_{\nu=0}^{\nu=2} \eta_{\mu\nu} (a_{\mu-1} - a_{\mu+1}) (b_{\nu-1} - b_{\nu+1}) = 0,$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=2} \sum_{\nu=0}^{\nu=2} \eta_{\mu\nu} (a_{\mu-1} - a_{\mu+1}) (b_{\nu-1}^2 - b_{\nu+1}^2) = 0,$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=2} \sum_{\nu=0}^{\nu=2} \eta_{\mu\nu} (a_{\mu-1}^2 - a_{\mu+1}^2) (b_{\nu-1} - b_{\nu+1}) = 0,$$

denn diese sagen nur aus, daß die Koeffizienten von $x^2 y^2$, $x^2 y$, $x y^2$ verschwinden.

Und nun ist auch schon ersichtlich, wie man im Falle einer ganzen Funktion der $m$ten Ordnung vorzugehen hat, um sie in Gestalt der verallgemeinerten Lagrangeschen Interpolationsformel auszudrücken. Das Restglied wurde früher abgeleitet.

Vierte Abteilung.

Die trigonometrische Interpolationsfunktion[1]).

---

§ 34. Die Interpolationsfunktion in der Lagrangeschen Gestalt.

Ist $F(z)$ eine Funktion von z, die die einfache Periode 2ω besitzt, so daß

$$F(z + 2\omega) = F(z)$$

gilt, und setzt man

$$z = \frac{2\omega}{2\pi} x,$$

so entspricht der Änderung der Veränderlichen z von 0 bis 2ω die der Variablen x von 0 bis 2π. Dann aber wird

$$F\left(\frac{2\omega}{2\pi} x\right)$$

---

[1]) Burkhardt, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II, S. 642 und Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. X, S. 228. Siehe auch Gauss' Werke III, S. 265.

eine Funktion von der Variablen x mit der Periode 2π, d. h. es ist

$$F\left[\frac{2\omega}{2\pi}(x+2\pi)\right]=F(z+2\omega)=F(z)=F\left(\frac{2\omega}{2\pi}x\right),$$

und mit solchen Funktionen wollen wir uns hier allein beschäftigen.

Neben eine eindeutige Funktion $f(x)$ von der Periode 2π soll nun wieder eine Näherungsfunktion $g(x)$ gestellt werden, die auch die Periode 2π besitze und in einem Intervalle von der Länge 2π an einer Reihe von Stellen α_ν dieselben Werte annehme wie $f(x)$.

Zuerst werden wir festsetzen, daß die Anzahl dieser Stellen α_ν ungerade sei, etwa $2n+1$, so daß $\nu=0, 1, 2, \ldots 2n$ gilt.

Von der Lagrangeschen Formel her ist unmittelbar ersichtlich, daß

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=2n} f(\alpha_\nu)\frac{\sin\frac{1}{2}(x-\alpha_0)\ldots/^{(\nu)}\ldots\sin\frac{1}{2}(x-\alpha_{2n})}{\sin\frac{1}{2}(\alpha_\nu-\alpha_0)\ldots/_{(\nu)}\ldots\sin\frac{1}{2}(\alpha_\nu-\alpha_{2n})}$$

eine eindeutige Funktion ist, die wirklich für $x=\alpha_\nu$ den Wert $f(\alpha_\nu)$ annimmt, die aber auch die Periode 2π besitzt, denn bei der Veränderung von x in $x+2\pi$ tritt in dem Zähler jedes Gliedes eine gerade Anzahl mal der Faktor -1 auf, man kann daher die frühere Summe für $g(x)$ wählen und kann in dem Intervalle von der Länge 2π setzen:

$$f(x)=g(x)+R(x).$$

Das Restglied $R(x)$ wird den Festsetzungen gemäß an den Stellen α_ν verschwinden. Das werde dadurch zum Ausdrucke gebracht, daß man

$$R(x)=r(x)\prod_{\nu=0}^{\nu=2n}\sin\frac{1}{2}(x-\alpha_\nu)$$

setzt und nun $r(x)$ als die zu bestimmende Funktion aufnimmt.

Man bezeichne

$$\prod_{\nu=0}^{\nu=2n}\sin\frac{1}{2}(x-\alpha_\nu)\ \text{ mit }\ \Pi(x)$$

und untersuche so wie früher (s. S. 98) die Funktion

$$\Phi(z)=f(z)-g(z)-r(x)\,\Pi(z).$$

Von dieser Funktion kann man sagen, daß sie in dem Intervalle von der Länge 2π, in dem die $2n+1$ Stellen α_ν liegen, mindestens an den $2n+2$ Stellen $z = \alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{2n}$ und x verschwindet. Dann ist aber nach dem Satze von Rolle die erste Ableitung von $\Phi(z)$ nach z, die bestehe, in dem gleichen Intervalle mindestens an $2n+1$ Stellen null; die zweite Ableitung, die auch bestehe, mindestens an $2n$ Stellen null usw. und endlich die auch existierende $(2n+1)$-ste Ableitung $\Phi^{(2n+1)}(z)$ an einer Stelle $z = \xi$ gleich null. Also es ist

$$f^{(2n+1)}(\xi) - g^{(2n+1)}(\xi) - r(x)\,\Pi^{(2n+1)}(\xi) = 0,$$

und

$$r(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi) - g^{(2n+1)}(\xi)}{\Pi^{(2n+1)}(\xi)},$$

also

$$R(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi) - g^{(2n+1)}(\xi)}{\Pi^{(2n+1)}(\xi)}\,\Pi(x),$$

wo ξ eine in dem Intervalle von der Länge 2π liegende unbekannte Stelle ist.

Mit dem Restgliede werden wir uns späterhin zu befassen haben.

§ 35. Die trigonometrische Interpolationsfunktion in Gestalt einer endlichen Reihe.

Jetzt soll zunächst $g(x)$ auf die Form gebracht werden:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=0}^{\mu=n} a_\mu \cos\mu x + b_\mu \sin\mu x.$$

Wenn man in dem einzelnen Gliede der früheren Summe für $g(x)$ das Produkt je zweier der im Zähler vorkommenden Faktoren auf Grund der Formel

$$\sin\alpha . \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$$

umwandelt und dann Ausdrücke der Form

$$\cos\left[x - \frac{1}{2}(\alpha_\nu + \alpha_{\nu'})\right]$$

nach der Additionsformel für den Kosinus entwickelt, so wird der Zähler jedes Gliedes eine ganze Funktion $n$ten Grades von $\cos x$ und $\sin x$.

Doch wenn man weiter die Formeln anwendet:

$$2^{2m-1}\cos^{2m}\alpha = \cos 2m\alpha + \binom{2m}{1}\cos(2m-2)\alpha + \cdots$$
$$+ \binom{2m}{m-1}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\binom{2m}{m},$$
$$2^{2m}\cos^{2m+1}\alpha = \cos\overline{2m+1}\,\alpha + \binom{2m+1}{1}\cos\overline{2m-1}\,\alpha + \cdots$$
$$+ \binom{2m+1}{m}\cos\alpha,$$
$$(-1)^m 2^{2m-1}\sin^{2m}\alpha = \cos 2m\alpha - \binom{2m}{1}\cos\overline{2m-2}\,\alpha + \cdots$$
$$+ (-1)^m \frac{1}{2}\binom{2m}{m},$$
$$(-1)^m 2^{2m}\sin^{2m+1}\alpha = \sin\overline{2m+1}\,\alpha -$$
$$- \binom{2m+1}{1}\sin\overline{2m-1}\,\alpha + \cdots + (-1)^m\binom{2m+1}{m}\sin\alpha,$$

so ist offenbar, daß die genannte Umformung unter allen Umständen ausführbar ist.

In dem Falle äquidistanter Stellen α_ν, so daß etwa

$$\alpha_0 = \alpha, \quad \alpha_1 = \alpha + \frac{2\pi}{2n+1}, \ \ldots \ \alpha_{2n} = \alpha + 2n\frac{2\pi}{2n+1},$$

gilt, sollen die Koeffizienten der $2n+1$ folgenden, die Eigenschaften von $g(x)$ ausdrückenden linearen Gleichungen berechnet werden:

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos\alpha_0 + a_2\cos 2\alpha_0 + \cdots + b_n\sin n\alpha_0 = f(\alpha_0),$$
$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos 2\alpha_1 + \cdots + b_n\sin n\alpha_1 = f(\alpha_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos\alpha_{2n} + a_2\cos 2\alpha_{2n} + \cdots + b_n\sin n\alpha_{2n} = f(\alpha_{2n}).$$

Im Falle die Größen α_ν in der genannten gegenseitigen Beziehung stehen, wird, wie wir sehen werden, die Addition der $2n+1$ Gleichungen ergeben

$$\frac{a_0}{2}(2n+1) = f(\alpha_0) + f(\alpha_1) + \cdots + f(\alpha_{2n});$$

doch wenn man in unserem Falle die Gleichungen der Reihe nach mit

$$\cos\mu\alpha_0, \quad \cos\mu\alpha_1, \quad \ldots \quad \cos\mu\alpha_{2n}$$

beziehungsweise mit

$$\sin\mu\alpha_0, \quad \sin\mu\alpha_1, \quad \ldots \quad \sin\mu\alpha_{2n}$$

multipliziert und dann addiert, so findet man

$$\frac{2n+1}{2} a_\mu = \sum_{\nu=0}^{\nu=2n} f(\alpha_\nu)\cos\mu\alpha_\nu,$$

beziehungsweise

$$\frac{2n+1}{2} b_\mu = \sum_{\nu=0}^{\nu=2n} f(\alpha_\nu)\sin\mu\alpha_\nu \quad (\mu = 1, 2, \ldots n).$$

Diese Relationen werden offenbar als richtig erkannt sein, sobald die folgenden Gleichungen bewiesen sein werden:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=2n} \cos\mu\alpha_\nu \cos\mu'\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{2n+1}{2}, & \text{wenn } \mu' = \mu \text{ ist} \quad (1 \\ 0, & \text{,, } \mu' \neq \mu \text{ ,,} \quad (2 \end{cases}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=2n} \sin\mu\alpha_\nu \sin\mu'\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{2n+1}{2}, & \text{,, } \mu' = \mu \text{ ,,} \quad (3 \\ 0, & \text{,, } \mu' \neq \mu \text{ ,,} \quad (4 \end{cases}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=2n} \sin\mu\alpha_\nu \cos\mu'\alpha_\nu = \begin{cases} 0, & \text{,, } \mu' = \mu \text{ ,,} \quad (5 \\ 0, & \text{,, } \mu' \neq \mu \text{ ,,} \quad (6 \end{cases}$$

Es sollen zunächst die Formeln (1 und (3 bewiesen werden. Ersetzt man jedes Produkt zweier Kosinusse bzw. Sinusse unter den Summenzeichen der genannten Gleichungen auf Grund der Beziehungen:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

durch

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\mu\alpha_\nu) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}(1 - \cos 2\mu\alpha_\nu),$$

so kommt der Beweis der Formeln (1 und (3 auf den der Relation zurück:

$$\cos 2\mu\alpha_0 + \cos 2\mu\alpha_1 + \cdots + \cos 2\mu\alpha_{2n} = 0,$$

wo μ jeden positiven, ganzzahligen Wert gleich oder kleiner als n haben kann.

Diese Gleichungen aber bestehen. Ist nämlich

$$z_0 = \cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0 \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

eine Wurzel einer Gleichung

$$z^{2n+1} - A = 0,$$

wo $|A| = 1$ sei, so sind die übrigen Lösungen bekanntlich

$$z_\nu = \cos\alpha_\nu + i\sin\alpha_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots 2n),$$

und die Summe aller Wurzeln ist null, weil die Gleichung in z ein Glied mit z^{2n} nicht enthält. Und dann ist zunächst die Summe der reellen und imaginären Bestandteile null, also

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=2n} \cos\alpha_\nu = 0, \qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=2n} \sin\alpha_\nu = 0.$$

Nach dem Moivreschen Satze ist aber die 2μte Potenz der früheren Wurzel z_ν

$$\cos 2\mu\alpha_\nu + i\sin 2\mu\alpha_\nu$$

und wieder wird die Summe der reellen und imaginären Bestandteile der 2μten Potenzen aller $2n+1$ Wurzeln z_ν null, denn die 2μte Potenzsumme verschwindet, wenn

$$0 < \mu \leqq n$$

ist.

Ist aber

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=2n} \cos 2\mu\alpha_\nu = 0$$

und ebenso

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=2n} \cos\mu\alpha_\nu = 0,$$

so bestehen auch die Relationen (2 und (4, denn es verschwinden in den Gleichungen

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=2n} \cos\mu\alpha_\nu \cos\mu'\alpha_\nu = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\nu=2n} [\cos(\mu+\mu')\alpha_\nu + \cos(\mu-\mu')\alpha_\nu],$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=2n} \sin\mu\alpha_\nu \sin\mu'\alpha_\nu = -\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\nu=2n} [\cos(\mu+\mu')\alpha_\nu - \cos(\mu-\mu')\alpha_\nu]$$

die rechten Seiten, weil $\mu \pm \mu'$ nicht durch $2n+1$ teilbar ist und die $(\mu \pm \mu')$-te Potenzsumme der Wurzeln z_ν verschwindet.

Zum Beweise der Formeln (5 bemerke man nur, daß

$$2 \sum_{\nu=0}^{\nu=2n} \cos \mu \alpha_\nu \sin \mu \alpha_\nu = \sum_{\nu=0}^{\nu=2n} \sin 2 \mu \alpha_\nu$$

ist, und die Richtigkeit der Formeln ist auch schon erwiesen.

Endlich zum Beweise der Relationen (6 setze man auf Grund der Formel

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

jedes Glied in eine neue Form, und alles weitere ist klar.

Indem wir nun zu den $2n + 1$ linearen Gleichungen für die Größen a_μ und b_μ zurückgehen, so können wir jetzt auch schließen, was später von Bedeutung sein wird, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos \alpha_0, & \cos 2 \alpha_0, & \ldots & \sin n \alpha_0 \\ 1, & \cos \alpha_1, & \cos 2 \alpha_1, & \ldots & \sin n \alpha_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \cos \alpha_{2n}, & \cos 2 \alpha_{2n}, & \ldots & \sin n \alpha_{2n} \end{vmatrix}$$

gewiß nicht für jeden Wert von α verschwindet; denn in diesem Falle ergäbe sich nicht die schon gefundene bestimmte Lösung des Gleichungensystems.

Wenn man für jeden der Werte ν

$$\frac{2\pi}{2n + 1} = \varDelta \alpha_\nu$$

setzt, so lauten die früheren Formeln:

$$a_\mu = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\nu=2n} f(\alpha_\nu) \cos \mu \alpha_\nu \varDelta \alpha_\nu,$$

$$b_\mu = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\nu=2n} f(\alpha_\nu) \sin \mu \alpha_\nu \varDelta \alpha_\nu,$$

wo die erste nicht allein die Fälle $\mu = 1, 2, \ldots n$, sondern auch den Fall $\mu = 0$ umfaßt, wobei entsteht:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\nu=2n} f(\alpha_\nu) \varDelta \alpha_\nu.$$

Läßt man hierauf n immer größer werden, so daß also in das Intervall von der Länge 2π, dessen Anfangspunkt für die

periodische Funktion $f(x)$ willkürlich gewählt werden kann, immer mehr Stellen α_ν fallen, so entsteht schließlich für $n = \infty$

$$a_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos \mu \alpha \, d\alpha,$$

$$b_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin \mu \alpha \, d\alpha,$$

und die Näherungsfunktion $g(x)$ geht formal in die unendliche Reihe über:

$$G(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots.$$

Diese Reihe führt den Namen der Fourierschen, und die angegebenen Konstanten a_μ und b_μ heißen die Fourierschen Konstanten[1]).

Gesetzt, daß die Fouriersche Reihe konvergiere, so muß sie durchaus noch nicht die Funktion $f(x)$ darstellen, denn hierzu müßte, wie unmittelbar ersichtlich ist,

$$\lim_{n=\infty} R(x)$$

existieren und verschwinden; das allerdings wird, wie hier nebenbei bemerkt sei, gewiß zutreffen, sobald $f(x)$ in eine konvergente Fouriersche Reihe entwickelbar ist[2]), doch ist das Verschwinden der Grenze von $R(x)$ im Falle der Konvergenz der Fourierschen Reihe von vornherein wieder gar nicht selbstverständlich, da man ja in dem Falle, als in das Intervall 2π unbegrenzt viele Stellen α_ν hineinverlegt werden, über die Existenz des Rolleschen Satzes und über das Zutreffen der Aussage

$$\lim_{n=\infty} R(x) = 0$$

und somit auch über das der Beziehung $f(x) = G(x)$ nicht ohne weiteres etwas aussagen kann (vgl. S. 105).

Faßt man in der Fourierschen Reihe die zwei Glieder zusammen, die dieselben Vielfachen der Argumente enthalten — $a_\mu \cos \mu x$ und $b_\mu \sin \mu x$ — und setzt

$$a_\mu = c_\mu \sin \beta_\mu, \qquad b_\mu = c_\mu \cos \beta_\mu,$$

[1]) Hurwitz, Mathematische Annalen, Bd. 57, S. 425.

[2]) denn $f(x)$ ist nur in eine solche Reihe entwickelbar.

also
$$c_\mu = \sqrt{a_\mu^2 + b_\mu^2}, \qquad \operatorname{tg} \beta_\mu = \frac{a_\mu}{b_\mu},$$
so erhält man für die Fouriersche Reihe die Form
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} c_\mu \sin(\mu x + \beta_\mu).$$

Indem $c_\mu \sin(\mu x + \beta_\mu)$ den Verlauf einer einfachen harmonischen Bewegung darstellt, heißt c_μ die Amplitude und β_μ die Phase der μten Teilwelle der Bewegung, die durch $y = f(x)$ dargestellt erscheint.

Hier kann es nicht die Aufgabe sein, die bisher bekannten hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz der Fourierschen Reihe zu ermitteln; es muß vielmehr nur der Nachweis genügen, daß die Koeffizienten der Fourierschen Reihe die von Bessel[1]) bemerkte Eigenschaft besitzen, mit den gleichnamigen Koeffizienten der „besten" trigonometrischen Näherungsfunktion $g(x)$ der gegebenen Funktion $f(x)$ übereinzustimmen. Das heißt, wenn man entsprechend der im § 25 für die ganze rationale Näherungsfunktion durchgeführten Aufgabe auch hier nach derjenigen Näherungsfunktion
$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} a_\mu \cos\mu x + b_\mu \sin\mu x$$
von $f(x)$ fragt, für die aber die Annäherung an $f(x)$ in dem ganzen Intervalle von der Länge 2π eine möglichst gute wird, so werden für die Koeffizienten $\frac{a_0}{2}$, a_μ und b_μ diejenigen Fourierschen Konstanten als Werte hervorgehen, die in der Fourierschen Reihe bei dem Kosinus bzw. Sinus desselben Vielfachen des Argumentes x stehen.

Hier suchen wir die Koeffizienten (wie in § 25) zuerst auf Grund der Forderung, daß die Summe der Fehlerquadrate von $g(x)$ gegenüber $f(x)$ an den $2n + 1$ Stellen α_ν, das ist
$$\sum_{\nu=0}^{\nu=2n} \left[\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} a_\mu \cos\mu\alpha_\nu + b_\mu \sin\mu\alpha_\nu\right) - f(\alpha_\nu)\right]^2$$
ein Minimum werde.

Es sollen also die ersten Ableitungen nach den Unbekannten a_μ und b_μ verschwinden. Wenn man unter dem Summenzeichen

---

[1]) Bessel, Astronomische Nachrichten, 1828, Bd. VI, Kolonne 333.

den Minuenden des einzelnen Gliedes noch mit C_ν bezeichnet, so sollen also die Gleichungen bestehen:

$$[C_0 - f(\alpha_0)] + [C_1 - f(\alpha_1)] + \cdots + [C_{2n} - f(\alpha_{2n})] = 0,$$

$$\cos\alpha_0 [C_0 - f(\alpha_0)] + \cos\alpha_1 [C_1 - f(\alpha_1)] + \cdots + \cos\alpha_{2n} [C_{2n} - f(\alpha_{2n})] = 0,$$

. . . .

$$\cos n\alpha_0 [C_0 - f(\alpha_0)] + \cos n\alpha_1 [C_1 - f(\alpha_1)] + \cdots + \cos n\alpha_{2n} [C_{2n} - f(\alpha_{2n})] = 0,$$

$$\sin\alpha_0 [C_0 - f(\alpha_0)] + \sin\alpha_1 [C_1 - f(\alpha_1)] + \cdots + \sin\alpha_{2n} [C_{2n} - f(\alpha_{2n})] = 0,$$

. . . .

$$\sin n\alpha_0 [C_0 - f(\alpha_0)] + \sin n\alpha_1 [C_1 - f(\alpha_1)] + \cdots + \sin n\alpha_{2n} [C_{2n} - f(\alpha_{2n})] = 0.$$

Diese $2n + 1$ in den Klammergrößen linearen Gleichungen haben aber keine identisch verschwindende Determinante, denn diese ist nur die gestürzte frühere, d. h. es sind die Kolonnen jetzt Zeilen. Darum aber werden die linearen Gleichungen nur befriedigt, wenn die Klammergrößen selbst verschwinden, und man bekommt so für $\frac{a_0}{2}$, a_μ und b_μ die früher gelösten linearen Gleichungen.

Indem man hierauf in das Intervall von der Länge 2π immer mehr, schließlich unbegrenzt viele äquidistante Stellen α_ν hineinverlegt und die Koeffizienten der Forderung gemäß bestimmt, daß die Summe der Fehlerquadrate über das ganze Intervall erstreckt, also daß

$$\int_0^{2\pi} [G(x) - f(x)]^2 \, dx$$

ein Minimum werde, oder wie man sagt, die Annäherung in dem ganzen Intervalle eine möglichst gute werde, so erfährt man, daß die Koeffizienten in die gleichnamigen Fourierschen Konstanten übergehen:

$$a_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos\mu x \, dx,$$

$$b_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin\mu x \, dx,$$

was einleuchtet, wenn man auf die Veränderung des Systems von Gleichungen für die Größen a_μ und b_μ achtet.

Ist hierauf eine Funktion von der Periode 2π gegeben, so kann man ihre Werte an einer ungeraden Anzahl von Stellen α_ν ($\nu = 0, 1, \ldots 2n$) eines Intervalles von der Länge 2π durch Rechnung finden und kann die Funktion nach den Vorschriften des § 11 geometrisch darstellen und zwar um so genauer, je größer auch n ist. Hier nun, sowie in dem Falle als ein periodisch verlaufender Zusammenhang durch eine Kurve vorgegeben ist, kann man versuchen, zu ihrer Darstellung eine endliche trigonometrische Reihe herzustellen. Dabei wird man — jetzt ganz abgesehen von dem von den Größen a_μ und b_μ abhängenden Restgliede — die Koeffizienten so wählen, daß die Übereinstimmung zwischen der Kurve und der Näherungsfunktion in dem Intervalle 2π eine möglichst gute werde, d. h. hier wird man für a_μ und b_μ die Fourierschen Konstanten setzen und es kommt nun darauf an, diese Konstanten zu bilden.

§ 36. Harmonische Analysatoren[1]).

Zur Bestimmung der Fourierschen Konstanten sei zuerst bemerkt, daß

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y\,dx$$

den Mittelwert der den Stellen des Intervalles 2π zukommenden Ordinaten der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ bedeutet und daß $a_0\pi$ der über dem Intervalle 2π bis zu derselben Kurve ausgedehnten Fläche gleichkommt.

Das 2π-fache von a_μ und b_μ stellt ebenso je eine Fläche über der Strecke 2π dar, ausgedehnt bis zu den Kurven mit den Gleichungen

$$y = 2f(x)\cos\mu x \quad \text{bzw.} \quad y = 2f(x)\sin\mu x.$$

Über solche Flächenbestimmungen wird im nächsten Abschnitte verhandelt werden. Hier wollen wir nur den ersten Koeffizienten $\frac{a_0}{2}$ als bestimmbar ansehen und von der Ermittelung der anderen Koeffizienten sprechen.

[1]) Dyck, Katalog mathematischer Modelle 1892, 1893.

Um die Fourierschen Konstanten a_μ und b_μ ($\mu = 1, 2 \ldots n$) anzugeben, hat man Apparate, mit deren Hilfe die Ablesung von solchen Größen vollzogen wird, die die Bestimmung dieser Koeffizienten leicht ermöglichen. Diese Apparate heißen harmonische Analysatoren, und der von Henrici soll in der Ausführung von Coradi aus dem Jahre 1894 beschrieben werden. Als den vollkommensten Apparat bezeichnet Runge[1]) den von Michelson und Stratton.

Parallel den Längskanten eines rechtwinkeligen parallelopipedischen Rahmens R, von dem die Basisseitenfläche parallel einer horizontal gedachten Zeichnenfläche situiert werde, ist ein Zylinder A angebracht (in der schematischen Figur ist nur seine Achse angezeigt), den man bei Benützung des Analysators in die

Fig. 23.

Richtung der x Achse des in der Ebene der Kurve C gewählten Koordinatensystems zu bringen hat. Auf dem Zylinder A sitzen zwei Rollen B_1 und B_2. Diese und eine dritte Rolle B_3, die unmittelbar an dem Rahmen angebracht ist, geben die drei Unterstützungspunkte des ganzen Apparates auf der Zeichnenebene.

Parallel den Basiskanten des Rahmens läuft ein Schlitten W, mit dem ein Fahrstift F verbunden ist; mit diesem ist die Kurve C über dem ganzen Intervalle von 0 bis 2π zu durchfahren. Wenn F in der Richtung der x Achse bewegt wird, läuft der Schlitten mit ihm, doch wenn F in der Richtung der y Achse bewegt wird, wird auch der ganze Apparat bewegt.

Auf dem Zylinder sitzt noch eine Scheibe S, die nicht auf der Zeichnenebene aufruht, aber mit einer oberhalb der Scheibe S

[1]) Runge, l. c. (s. S. 44), S. 164.

angebrachten Kugel K in Berührung steht, deren Mittelpunkt in der den Berührungspunkt von Scheibe und Kugel enthaltenden, zur Zeichnenebene senkrechten Geraden G liegt.

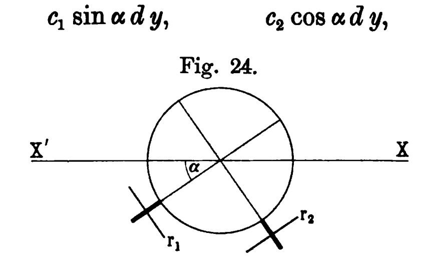
Die Achse G trägt oberhalb der Kugel und des Rahmens eine Scheibe E, um die ein Draht gelegt ist, der mit dem Rahmen und Schlitten in einer aus der Figur ersichtlichen Art in Verbindung steht.

Wenn nun F in der Richtung der Achse des Zylinders bewegt wird, so werden die Scheibe E und die Kugel K um die Vertikalachse um solche Winkel gedreht, die proportional der Verschiebung von F sind; doch wenn F senkrecht zu der früheren Bewegungsrichtung um dy bewegt wird, so wird die Scheibe S um die Achse des Zylinders A gedreht, und zwar um einen dy proportionalen Winkel. Die Kugel aber wird hierbei um einen zur x Achse parallelen Durchmesser XX' und zwar wieder um einen Winkel proportional dy gedreht.

Preßt man nun noch an die Kugel zwei Rollen r_1 und r_2, deren Achsen gegeneinander senkrecht stehen, so nehmen diese, wie die Fig. 24 zeigt, die Drehungen auf:

$$c_1 \sin \alpha \, dy, \qquad c_2 \cos \alpha \, dy,$$

Fig. 24.



wo c_1 und c_2 zwei dem Apparate eigene Konstanten sind. Nach einem Durchlaufen der Kurve C über der Strecke 2π liest man nun an den mit r_1 bzw. r_2 verbundenen Zählwerken ab:

$$c_1 \int_0^{2\pi} \sin \alpha \, dy \quad \text{und} \quad c_2 \int_0^{2\pi} \cos \alpha \, dy,$$

und je nach der Größe der Scheibe E — und bei einem Apparate gibt es mehrere solche Scheiben —

$$c_1 \int_0^{2\pi} \sin \mu \alpha \, dy \quad \text{und} \quad c_2 \int_0^{2\pi} \cos \mu \alpha \, dy.$$

Das aber sind bis auf die Faktoren

$$-\frac{1}{c_1\,\mu\,\pi} \quad \text{und} \quad \frac{1}{c_2\,\mu\,\pi}$$

gerade die Größen, deren man bedarf, denn die partielle Integration liefert:

$$a_\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y\cos\mu\,\alpha\,d\,\alpha = \frac{1}{\pi}\left(\frac{y\sin\mu\,\alpha}{\mu}\right)_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\mu\,\alpha}{\mu}\,d\,y,$$

$$b_\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y\sin\mu\,\alpha\,d\,\alpha = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{y\cos\mu\,\alpha}{\mu}\right)_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\mu\,\alpha}{\mu}\,d\,y$$

und rechterhand sind die ersten Glieder null[1]).

Dieser Apparat liefert also tatsächlich mit den Fourierschen Konstanten einfach zusammenhängende Größen, denn an dem Zählwerke der Rolle r_1 liest man ab, was zu der Konstanten a_μ führt, an der Rolle r_2 das, was zu b_μ führt.

§ 37. Die Methode von Fischer-Hinnen zur Bestimmung Fourierscher Konstanten[2]).

Ist eine Kurve C von periodischem Verlaufe gegeben $y = f(x)$ und setzt man voraus, daß $f(x)$ durch eine Fouriersche Reihe darstellbar sei, will aber einige der Koeffizienten in der Näherungsfunktion $g(x)$, also einige der Amplituden und Phasen c_μ und β_μ von Teilwellen in der Reihe

$$y - \frac{a_0}{2} = \eta = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} c_\mu \sin(\mu\,x + \beta_\mu)$$

besitzen, so kann man sich des Verfahrens von Fischer-Hinnen bedienen. Doch wollen wir über diese Methode nur berichten, weil sie auf einer nur näherungsweise zutreffenden Annahme beruht.

---

[1]) Gegenüber früher ist hier nur das Zeichen α statt x gebraucht.

[2]) Elektrotechnische Zeitschrift 1901, S. 396 bis 398. Lorenz, Technische Mechanik, S. 214.

Man findet nämlich nur dann, wenn die Amplituden

$$c_m, \quad c_{2m}, \quad c_{3m}, \ldots$$

rasch abnehmen, daß das arithmetische Mittel η_1 der den m Stellen

$$x + \varkappa \frac{2\pi}{m}, \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots \overline{m-1})$$

zukommenden Ordinaten der Kurve C nahezu

$$c_m \sin m (x + \beta_m)$$

ist; und daß nur dann das arithmetische Mittel η_2 der den Stellen

$$\frac{(4k+1)\pi}{2m}, \quad (k = 0, 1, \ldots \overline{m-1})$$

zukommenden Ordinaten der Kurve nahezu

$$c_m \cos m (x + \beta_m)$$

ist, und nur dann

$$c_m = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$$

gilt. Richtig ist nämlich

$$\eta_1 = c_m \sin m (x + \beta_m) + c_{2m} \sin 2m (x + \beta_{2m}) + \cdots$$

usw.

Die Phase β_m findet man, indem man bemerkt, daß unter der gemachten Annahme das arithmetische Mittel der den m Stellen $k \frac{2\pi}{m}$ zukommenden Ordinaten nahezu

$$c_m \sin m \beta_m$$

ist, wo nun c_m bekannt ist, so daß man β_m finden kann.

Die in Rede gebrachten arithmetischen Mittel liest man von der Kurve ab und bestimmt näherungsweise die $m$te Teilwelle. Doch bei der Anwendung ist es passend, von dem größeren zu dem kleineren Werte m zu gehen, also die $m$te Teilwelle und nach Subtraktion ihrer Ordinaten von denen der gegebenen Kurve die $(m-1)$-te Teilwelle zu suchen usw., da man ohnehin die $m = 1$ entsprechende Welle durch Subtraktion der größeren m zukommenden Teilwellen zugehörigen Ordinaten von denen der Kurve findet.

Es gibt ein Interpolationsverfahren[1]), das die Berechnung einer verhältnismäßig kleinen Anzahl von Koeffizienten der Nähe-

[1]) Tschebychef, Oeuvres, t. 1, p. 385.

rungsfunktion bestimmen lehrt, wenn eine große Anzahl von Beobachtungsdaten zur Verfügung steht, und zwar bloß durch Addition und Subtraktion dieser Daten. Dieses Verfahren ist für trigonometrische Näherungsfunktionen sehr geeignet[1]). Trotzdem aber gehen wir auf dieses Verfahren hier nicht ein, weil die Vorbereitungen umständlich wären und ziehen es vor, gleich eine beschränkte Anzahl von Koeffizienten a_μ und b_μ unserer Näherungsfunktion zu berechnen, wenn entweder die Ordinaten einer Kurve, die eine Funktion darstellt, oder die Werte einer Abhängigkeit an einer diskontinuierlichen Folge von äquidistanten Stellen x_i als bekannt gelten; sie heißen

$$f(x_i), \quad (i = 1, 2, \dots m).$$

Das eben nur erwähnte Interpolationsverfahren von Tschebychef nimmt also eine mittlere Stellung ein zwischen dem Verfahren, wo die Entwickelung der abhängigen Größe nach der Fourierschen Reihe vorausgesetzt wird, und dem letztgenannten, noch zu erledigenden Falle.

Unter den vielen Methoden zur Lösung der beabsichtigten Aufgabe sei die von Runge herausgegriffen[2]).

§ 38. Bestimmung der Koeffizienten der Näherungsfunktion nach Runge.

Runge zerlegt das Intervall 2π nicht in eine ungerade Anzahl gleicher Teile, nicht in $2n+1$, sondern in $4n$ gleiche Teile, nennt den Anfangspunkt des Intervalles x_0 und die Abszissen der folgenden Teilpunkte $x_1, x_2, \dots x_{4n-1}$ und setzt die Näherungsfunktion in die Form

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=2n-1} a_\mu \cos \mu x + b_\mu \sin \mu x \right) + a_{2n} \cos 2nx.$$

Man bestimme deren Koeffizienten wieder auf Grund der Forderung, daß

$$\sum_{i=0}^{i=4n-1} [g(x_i) - f(x_i)]^2$$

---

[1]) Bruns, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens, S. 130.

[2]) Runge, Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 48.

ein Minimum werde. Dann müssen die Ableitungen des Aggregates nach den Koeffizienten a_μ und b_μ verschwinden. Die so entstehenden Gleichungen werden erfüllt, wenn die Relationen bestehen:

$$\frac{a_0}{2} + \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=2n-1} a_\mu \cos \mu x_i + b_\mu \sin \mu x_i \right) + a_{2n} \cos 2n x_i = f(x_i),$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots \overline{4n-1})$$

aus denen folgt

$$4n \frac{a_0}{2} = \sum_{i=0}^{i=4n-1} f(x_i),$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{4n}{2} a_\mu &= \sum_{i=0}^{i=4n-1} f(x_i) \cos \mu x_i, \\ \frac{4n}{2} b_\mu &= \sum_{i=0}^{i=4n-1} f(x_i) \sin \mu x_i, \end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, 2, \ldots 2n-1)$$

$$4n a_{2n} = \sum_{i=0}^{i=4n-1} f(x_i) \cos 2n x_i.$$

Diese Gleichungen sind in einer Weise geschrieben, daß sie den Vergleich mit denen auf S. 149 u. 150 unmittelbar gestatten.

Wenn man jetzt mit x einen Winkel von $\frac{360}{4n} x$ Grad bezeichnet, also dem Anfangspunkte unseres Intervalles von der Länge 2π den Winkel von 0°, dem Endpunkte einen Winkel von 360°, und irgend einem Punkte des Intervalles in der genannten Weise einen Winkel zwischen diesen Grenzen zuordnet, so hat man den Vorteil, daß

$$\begin{aligned} \sin x_{4n-i} &= - \sin x_i, \\ \cos x_{4n-i} &= \cos x_i \end{aligned}$$

wird, was natürlich nicht zutrifft, wenn x_i wie früher gleichbedeutend mit $x_0 + i \frac{2\pi}{4n}$ aufgefaßt wird.

Nun kann man die früheren Gleichungen folgendermaßen schreiben:

$$4n\frac{a_0}{2} = \sum_{i=0}^{i=2n} [f(x_i) + f(x_{4n-i})],$$

$$2n\,a_\mu = \sum_{i=0}^{i=2n} [f(x_i) + f(x_{4n-i})] \cos\mu x_i,$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots 2n - 1)$$

$$2n\,b_\mu = \sum_{i=0}^{i=2n} [f(x_i) - f(x_{4n-i})] \sin\mu x_i,$$

$$4n\,a_{2n} = \sum_{i=0}^{i=2n} [f(x_i) + f(x_{4n-i})] \cos 2n x_i,$$

wo in der dritten Gleichung $\sin\mu x_0 = \sin\mu x_{2n} = 0$ gilt.

Man bilde nun die Verbindungen

$$f(x_i) - f(x_{4n-i}) = \psi_i,$$
$$f(x_i) + f(x_{4n-i}) = \varphi_i,$$

und bemerke, daß $\psi_0 = 0$ ist, weil $f(x_{4n}) = f(x_0)$ gilt, und beachte, daß $\varphi_0 = f(x_0)$ und $\varphi_{2n} = f(x_{2n})$ ist, denn in den früheren Darstellungen kommt der Wert $f(x_{4n})$ nicht vor und ein Glied $f(x_{2n}) \cos\mu x_{2n}$ gibt es nur einmal. Kurz, man stelle das Schema her

$$\begin{array}{llll} f(x_0), & f(x_1), & \ldots f(x_{2n-1}), & f(x_{2n}), \\ & f(x_{4n-1}), & \ldots f(x_{2n+1}), & \end{array}$$

bilde Differenzen und Summen der untereinander stehenden Größen, die obere vermindert oder vermehrt um die untere und setze $\psi_0 = \psi_{2n} = 0$. Dann kann man die Formeln anschreiben:

$$4n\frac{a_0}{2} = \sum_{i=0}^{i=2n} \varphi_i,$$

$$2n\,a_\mu = \sum_{i=0}^{i=2n} \varphi_i \cos\mu x_i,$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots \overline{2n - 1})$$

$$2n\,b_\mu = \sum_{i=0}^{i=2n} \psi_i \sin\mu x_i,$$

$$4n\,a_{2n} = \sum_{i=0}^{i=2n} \varphi_i \cos 2n x_i,$$

und hier sind schon weniger den Kosinus oder Sinus enthaltende Glieder als in den früheren Gleichungen.

Doch auch hier gibt es wieder Glieder, die denselben trigonometrischen Faktor besitzen, indem

$$\sin \mu x_{2n-i} = \pm \sin \mu x_i,$$
$$\cos \mu x_{2n-i} = \mp \cos \mu x_i$$

gilt, je nachdem μ ungerade oder gerade ist.

Danach aber setze man die Größen ψ und φ so wie früher die $f(x_i)$ in Schemen und bilde Differenzen und Summen:

1.

	$\psi_1,$	$\psi_2,$	$\ldots$	$\psi_{n-1},$	$\psi_n,$
	$\psi_{2n-1},$	$\psi_{2n-2},$	$\ldots$	$\psi_{n+1},$	
Differenzen	$\bar{\psi}'_1,$	$\bar{\psi}'_2,$	$\ldots$	$\bar{\psi}'_{n-1},$	
Summen	$\bar{\varphi}'_1,$	$\bar{\varphi}'_2,$	$\ldots$	$\bar{\varphi}'_{n-1},$	$\bar{\varphi}'_n.$

2.

	$\varphi_0,$	$\varphi_1,$	$\varphi_2,$	$\ldots$	$\varphi_{n-1},$	$\varphi_n,$
	$\varphi_{2n},$	$\varphi_{2n-1},$	$\varphi_{2n-2},$	$\ldots$	$\varphi_{n+1},$	
Differenzen	$\bar{\psi}_0,$	$\bar{\psi}_1,$	$\bar{\psi}_2,$	$\ldots$	$\bar{\psi}_{n-1},$	
Summen	$\bar{\varphi}_0,$	$\bar{\varphi}_1,$	$\bar{\varphi}_2,$	$\ldots$	$\bar{\varphi}_{n-1},$	$\bar{\varphi}_n,$

so entstehen aus den letzten Gleichungen im Falle eines ungeraden μ die folgenden

$$2 n a_\mu = \sum_{i=0}^{i=n-1} \bar{\psi}_i \cos \mu x_i,$$

$$2 n b_\mu = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{\varphi}'_i \sin \mu x_i,$$

aber im Falle eines geraden μ

$$2 n a_\mu = \sum_{i=0}^{i=n} \bar{\varphi}_i \cos \mu x_i,$$

$$2 n b_\mu = \sum_{i=1}^{i=n-1} \bar{\psi}'_i \sin \mu x_i,$$

und ferner wird

$$4 n \frac{a_0}{2} = \sum_{i=0}^{i=n} \bar{\varphi}_i, \qquad 4 n a_{2n} = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \bar{\varphi}_i.$$

Es ist am besten, die Koeffizienten a_μ und $a_{2n-\mu}$ und ebenso die Koeffizienten b_μ und $b_{2n-\mu}$ gleichzeitig zu berechnen, denn indem man die Summanden für a_μ und ebenso die für b_μ abwechselnd in zwei Kolonnen schreibt, die Kolonnensummen bildet und diese addiert und subtrahiert, so erhält man $2 n a_\mu$ und $2 n a_{2n-\mu}$ bzw. $2 n b_\mu$ und $2 n b_{2n-\mu}$.

Im Beispiele $n = 3$ wird

$$\begin{aligned}
\sin x_0 &= \sin\ 0^0 = \cos 90^0 = 0 &&= \cos x_3,\\
\sin x_1 &= \sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2} &&= \cos x_2,\\
\sin x_2 &= \sin 60^0 = \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} &&= \cos x_1,\\
\sin x_3 &= \sin 90^0 = \cos\ 0^0 = 1 &&= \cos x_0,
\end{aligned}$$

und man hat, wenn die trigonometrischen Faktoren links in eine Kolonne geschrieben werden, erstens für die Herstellung der b das Schema zu bilden:

	$\mu = 1, 5,$		$\mu = 2, 4,$	
$\sin x_1 = \frac{1}{2}$	$\bar\varphi'_1$			
$\sin x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$		$\bar\varphi'_2$	$\bar\psi'_1$	$\bar\psi'_2$
$\sin x_3 = 1$	$\bar\varphi'_3$			
Kolonnensummen . . .	$\frac{\bar\varphi'_1}{2} + \bar\varphi'_3,$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\bar\varphi'_2$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\bar\psi'_1,$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\bar\psi'_2$

$$\begin{aligned}
2.3.b_1 &= \frac{\bar\varphi'_1}{2} + \bar\varphi'_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar\varphi'_2 &\qquad 2.3.b_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\bar\psi'_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar\psi'_2\\
2.3.b_5 &= \frac{\bar\varphi'_1}{2} + \bar\varphi'_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar\varphi'_2 &\qquad 2.3.b_4 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\bar\psi'_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar\psi'_2
\end{aligned}$$

und ferner ist

$$6\,b_3 = \bar\varphi'_1 \sin 3\,x_1 + \bar\varphi'_3 \sin 3\,x_3 = \bar\varphi'_1 - \bar\varphi'_3.$$

Das Schema zur Herstellung der a lautet:

	$\mu = 1, 5,$		$\mu = 2, 4,$		$\mu = 3,$
$\cos x_0 = 1$	$\overline{\psi}_0$		$\overline{\varphi}_0$	$-\overline{\varphi}_3$	$\overline{\psi}_0 - \overline{\psi}_2, 0$
$\cos x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$		$\overline{\psi}_1$			
$\cos x_2 = \frac{1}{2}$	$\overline{\psi}_2$		$-\overline{\varphi}_2$	$\overline{\varphi}_1$	
Kolonnen-summen	$\overline{\psi}_0 + \frac{\overline{\psi}_2}{2},$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{\psi}_1$	$\overline{\varphi}_0 - \frac{\overline{\varphi}_2}{2},$	$-\overline{\varphi}_3 + \frac{\overline{\varphi}_1}{2}$	$\overline{\psi}_0 - \overline{\psi}_2$

$$2.3.a_1 = \overline{\psi}_0 + \frac{\overline{\psi}_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{\psi}_1 \qquad 2.3.a_2 = \overline{\varphi}_0 - \frac{\overline{\varphi}_2}{2} - \overline{\varphi}_3 + \frac{\overline{\varphi}_1}{2}$$

$$2.3.a_5 = \overline{\psi}_0 + \frac{\overline{\psi}_2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{\psi}_1 \qquad 2.3.a_4 = \overline{\varphi}_0 - \frac{\overline{\varphi}_2}{2} + \overline{\varphi}_3 - \frac{\overline{\varphi}_1}{2}$$

$$2.3.a_3 = \overline{\psi}_0 - \overline{\psi}_2$$

und endlich wird

$$12\frac{a_0}{2} = \overline{\varphi}_0 + \overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2 + \overline{\varphi}_3,$$

$$12\, a_6 = \overline{\varphi}_0 - \overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2 - \overline{\varphi}_3.$$

Damit ist die Bildung der Näherungsfunktion

$$\frac{a_0}{2} + \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=5} a_\mu \cos \mu x + b_\mu \sin \mu x\right) + a_6 \cos 6x$$

ausgeführt.

§ 39. Das Restglied der trigonometrischen Interpolationsfunktion[1]).

Wenn eine Funktion $f(x)$ von der Periode 2π näherungsweise durch eine endliche trigonometrische Reihe $g(x)$ auszudrücken war, so hatte man im allgemeinen stets ein Restglied

[1]) Biermann, Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wiss. in Wien 1904, Abt. II.

$R(x)$ hinzuzufügen, wie ein solches im Falle, als das Intervall 2π in eine ungerade Anzahl gleicher Teile zerlegt war, schon abgeleitet wurde.

Wenn das Intervall 2π aber in $4n$ gleiche Teile geteilt wird, wie im vorigen Paragraphen, so kann man ebenfalls

$$f(x) = g(x) + R(x)$$

und

$$R(x) = r(x) \prod_{i=0}^{i=4n-1} \sin \frac{1}{2}(x - x_i) = r(x)\Pi(x)$$

setzen, weil wieder $g(x_i) = f(x_i)$ ist, und nun wie früher ableiten, daß

$$r(x) = \frac{f^{(4n)}(\xi) - g^{(4n)}(\xi)}{\Pi^{(4n)}(\xi)}$$

wird, wo ξ eine zwischen den Stellen x_i und x liegende mittlere und unbekannte Stelle ist.

Im Falle eine Funktion $f(x)$ zur Darstellung gelangt, so ist aus dem Restgliede selbst ganz ersichtlich, wie man es zu beurteilen hat, d. h. wie man erkennt, welchen Fehler man höchstens begeht, indem man $f(x)$ durch seine Näherungsfunktion ersetzt. Doch sind hier zwei Bemerkungen am Platze:

Erstens, wie man die mehrfache Ableitung von $\Pi(x)$ bildet, und

zweitens, wie man $r(x)$ an einer Nullstelle von dem früheren $\Pi^{(2n+1)}(x)$ bzw. an einer Nullstelle von $\Pi^{(4n)}(x)$ beurteilt.

Also erstens soll, sagen wir, die $m$te Ableitung des Produktes von k Faktoren

$$u_i(x) = \sin \frac{1}{2}(x - x_i)$$

beschrieben werden. Heißt das Produkt

$$\Pi(x) = u_0(x) \cdot u_1(x) \cdot \cdots u_{k-1}(x),$$

so ist die $m$te Ableitung in symbolischer Gestalt durch

$$\left(\frac{d u_0}{d x} + \frac{d u_1}{d x} + \cdots + \frac{d u_{k-1}}{d x}\right)^{(m)}$$

gegeben, d. h. man hat die $m$te Potenz des Klammerausdruckes zu bilden und dabei die nullte Potenz von $\frac{d u_x}{d x}$ durch u_x, die μte Potenz aber durch die μte Ableitung von u_x zu ersetzen.

Im Falle $k = 2$ ist die Behauptung wohl bekannt, im Falle eines größeren k wird sie durch vollständige Induktion bewiesen.

Es sei nur gelegentlich auch in Erinnerung gebracht, daß sich die $m$te Potenz der additiven Vereinigung von k Größen in die Gestalt bringen läßt

$$(c_0 + c_1 + \cdots + c_{k-1})^m = C_0 + C_1 + \cdots + C_p + \cdots,$$

wo die Glieder $C_0, C_1, \ldots C_p, \ldots$ schrittweise aus den folgenden Relationen zu entnehmen sind:

$$\begin{aligned}
C_0 &= c_0^m,\\
1\, c_0\, C_1 &= m\, c_1\, C_0,\\
2\, c_0\, C_2 &= 2\, m\, c_2\, C_0 + (m-1)\, c_1\, C_1,\\
3\, c_0\, C_3 &= 3\, m\, c_3\, C_0 + (2m-1)\, c_2\, C_1 + (m-2)\, c_1\, C_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
p\, c_0\, C_p &= p\, m\, c_p\, C_0 + [(p-1)\, m - 1]\, c_{p-1}\, C_1 + \\
&+ [(p-2)\, m - 2]\, c_{p-2}\, C_2 + \cdots + [1 \,.\, m - (p-1)]\, c_1\, C_{p-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Die etwa auftretenden Koeffizienten $c_k, c_{k+1}, \ldots$ sind dabei null.

Will man zweitens $r(x)$ an einer Nullstelle von $\Pi^{(k)}(x)$, wo $k = 2n + 1$ oder $4n$ ist, aber entsprechend diesen Fällen $\Pi(x)$ ein Produkt von $2n + 1$ bzw. $4n$ Faktoren bedeutet, so beachte man, daß zufolge der Gleichungen

$$f^{(k)}(\xi) - g^{(k)}(\xi) - r(x)\, \Pi^{(k)}(\xi) = 0, \quad (k = 2n + 1,\ 4n)$$

an der Nullstelle ξ von $\Pi^{(k)}(x)$ auch

$$f^{(k)}(\xi) - g^{(k)}(\xi)$$

verschwindet und dann $r(x)$ als Quotient zweier an derselben Stelle verschwindender Funktionen im allgemeinen durch den Quotienten

$$\frac{f^{(k+1)}(\xi) - g^{(k+1)}(\xi)}{\Pi^{(k+1)}(\xi)}$$

auszudrücken sein wird.

Im Falle nicht bekannt ist, ob ein vorgegebener Zusammenhang zwischen x und y eine Funktion ist, doch aber auf Grund von Beobachtungen deutlich eine einfache Periodizität in Erscheinung tritt, so kann man immerhin auch versuchen, den Verlauf des Zusammenhanges $y(x)$ durch eine Näherungsfunktion $g(x)$ zu beschreiben. Doch kann nur die Erfahrung lehren, wie weit genau $g(x)$ die Beschreibung liefert.

In dem früheren Ausdrucke für das Restglied $R(x)$ kann man nämlich $f^{(k)}(x)$ nicht bilden, denn man hat weder $f(x)$ noch

seine Ableitungen, kann also höchstens annehmen, daß $y(x)$ wie eine Funktion zu behandeln sei und kann die $k$te Ableitung von y an der mittleren Stelle ξ durch den gleichnamigen Differenzenquotienten ersetzen, wobei natürlich die Größe der Distanz der Stellen, an denen $y(x)$ zugrunde gelegt wird, in gewissem Sinne willkürlich ist, aber gewiß nicht gleich der Distanz der in der Näherungsfunktion $g(x)$ verwendeten Stellen sein kann, weil man in diesem Falle der Gleichheit nur den Differenzenquotienten von $g(x)$ bildete. Oder man kann die Formeln zur mechanischen Differentiation, § 28, S. 132, anwenden und nachsehen, ob die dabei entstehenden Werte für $R(x)$ auf Grund von Erfahrungen zu vernachlässigen sind, denn nur dann kann man den Zusammenhang durch $g(x)$ beschreiben.

So kann man z. B. zeigen, daß wenigstens für die leicht zugänglichen Unterschiede der Zeiten und Lufttemperaturen an einem heiteren Tage und an demselben Orte der Gang der Temperatur durch eine Funktion der einfachen Form

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

nicht zu beschreiben ist, indem das hier in Betracht zu ziehende Restglied Werte annimmt, die man bei Beurteilung der täglichen Temperatur nicht zu vernachlässigen vermag.

Damit schließen wir die Auseinandersetzungen über die trigonometrische Interpolationsfunktion einer Variablen und gehen auf die entsprechende Interpolationsfunktion zweier Variablen hier nicht ein.

Fünfter Abschnitt.

Anwendung der Interpolationsrechnung auf die näherungsweise Quadratur und Kubatur.

---

§ 40. Die Rechteck-, Trapez-, Simpsonsche und Cotessche Formel [1]).

Deutet man x und y als rechtwinkelige Punktkoordinaten, so wird die Größe der Fläche zwischen der Kurve, die die Gleichung $y = f(x)$ besitzt, der x Achse und den in den Abständen c und d parallel zur Ordinatenachse gelegten Geraden bekanntlich durch das Integral ausgedrückt

$$\int_c^d f(x)\,dx.$$

Bei einer näherungsweisen Angabe des Integrales vollzieht man die Bestimmung dieser Fläche selbstverständlich auch nur näherungsweise, und um eine solche Flächenbestimmung zu bewerkstelligen, ersetze man $f(x)$ näherungsweise entweder durch eine ganze Funktion nullten, ersten oder zweiten usw. schließlich $n$ten Grades $g(x)$, die bzw. an einer Stelle a_0 oder an den zwei Stellen c und d oder an den drei Stellen

$$c, \quad \frac{c+d}{2}, \quad d,$$

usw., oder endlich an den $n+1$ äquidistanten Stellen

$$c, \quad c+\frac{d-c}{n}, \quad c+2\,\frac{d-c}{n}, \quad \ldots\; c+(n-1)\,\frac{d-c}{n},$$
$$c+n\,\frac{d-c}{n} = d$$

---

[1]) Vgl. z. B. Markoff, l. c. (s. S. 92).

mit $f(x)$ übereinstimme, und füge jedesmal ein in bekannter Weise zu bildendes Restglied $R(x)$ hinzu und vollziehe hierauf die Integration:

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d g(x)\,dx + \int_c^d R(x)\,dx.$$

Nach der Lagrangeschen Interpolationsformel hat man in den genannten Fällen zu setzen:

1. $$f(x) = f(a_0) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x - a_0),$$

2. $$f(x) = f(c)\frac{x-d}{c-d} + f(d)\frac{x-c}{d-c} + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)(x-d)$$

und nach sehr einfachen Umformungen:

3. $$f(x) = f(c)\frac{(2x-c-d)(x-d)}{(d-c)^2} - 4f\left(\frac{c+d}{2}\right)\frac{(x-c)(x-d)}{(d-c)^2} + \\ + f(d)\frac{(x-c)(2x-c-d)}{(d-c)^2} + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-c)\left(x-\frac{c+d}{2}\right)(x-d)$$

und

4. $$f(x) = \\ = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} f\left(c+\nu\frac{d-c}{n}\right)\frac{\prod\limits_{\mu=0}^{\mu=n}\left(x-c-\mu\frac{d-c}{n}\right)}{\nu!(n-\nu)!(-1)^{n-\nu}\left(\frac{d-c}{n}\right)^n\left(x-c-\nu\frac{d-c}{n}\right)} + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{\mu=0}^{\mu=n}\left(x-c-\mu\frac{d-c}{n}\right).$$

Indem man die Fläche über dem Intervalle von c bis d durch ein Rechteck von der Breite $d - c$ und einer Höhe $f(a_0)$ ersetzt und integriert, so entsteht die sog. Rechteckformel und insbesondere, wenn man $a_0 = c$ setzt, wird

$$\int_c^d f(x)\,dx = f(c)(d-c) + \int_c^d \frac{f'(\xi)}{1!}(x-c)\,dx = \\ = f(c)(d-c) + f'(\eta)\left(\frac{x^2-2cx}{2}\right)_c^d = \\ = f(c)(d-c) + \frac{f'(\eta)}{2}(d-c)^2,$$

wobei nun der Mittelwertsatz zur Anwendung kam, weil $x - c$ sein Zeichen nicht wechselt, wenn x das Integrationsintervall durchläuft.

Ferner gilt, wenn man $a_0 = d$ setzt:

$$\int_c^d f(x)\,dx = f(d)(d-c) + \int_c^d f'(\xi)(x-d)\,dx =$$
$$= f(d)(d-c) - \frac{f'(\eta)}{2}(d-c)^2.$$

Sobald also die Kurve $y = f(x)$ in dem ganzen Integrationsintervalle fällt, wird das erste Restglied negativ, das zweite hingegen positiv und im entgegengesetzten Falle gilt das Umgekehrte.

Im Falle

$$a_0 = \frac{c+d}{2}$$

ist, läßt sich der ein bestimmtes Integral betreffende Mittelwertsatz nicht unmittelbar anwenden. Man muß vielmehr das Integrationsintervall teilen und etwa bilden

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^{\frac{c+d}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{c+d}{2}}^d f(x)\,dx =$$
$$= f\left(\frac{c+d}{2}\right)(d-c) - \frac{(d-c)^2}{8}\,[f'(\eta_1) - f'(\eta_2)],$$

wo η_1 und η_2 zwei in dem ersten bzw. zweiten Halbteile des Integrationsintervalles liegende Stellen sind.

Oder man kann nach der Taylorschen Formel setzen:

$$f(x) = f\left(\frac{c+d}{2}\right) + f'\left(\frac{c+d}{2}\right)\left(x - \frac{c+d}{2}\right) +$$
$$+ \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{c+d}{2}\right)^2$$

und hierauf gliedweise integrieren; dabei entsteht:

$$\int_c^d f(x)\,dx = f\left(\frac{c+d}{2}\right)(d-c) + 0 +$$
$$+ \frac{f''(\eta)}{2!}\int_c^d \left(x - \frac{c+d}{2}\right)^2 dx = f\left(\frac{c+d}{2}\right)(d-c) + \frac{(d-c)^3}{24} f''(\eta).$$

Der zweiten Interpolationsfunktion (s. S. 171) entspricht die sog. „Trapezformel“:

$$\int_c^d f(x)\,dx = \frac{d-c}{2}\,[f(c)+f(d)] - \frac{(d-c)^3}{12}\,f''(\eta),$$

wenn die zu bestimmende Fläche über der Strecke von c bis d durch das Trapez mit den parallelen Seiten von den Längen $f(c)$ und $f(d)$ ersetzt wird.

Im dritten Falle hat man die Integrale zu berechnen:

$$\frac{f(c)}{(d-c)^2}\int_c^d (2x-c-d)(x-d)\,dx = f(c)\,\frac{d-c}{6}$$

$$-\frac{4f\left(\frac{c+d}{2}\right)}{(d-c)^2}\int_c^d (x-c)(x-d)\,dx = 4f\left(\frac{c+d}{2}\right)\frac{d-c}{6},$$

$$\frac{f(d)}{(d-c)^2}\int_c^d (x-c)(2x-c-d)\,dx = f(d)\,\frac{d-c}{6},$$

was keiner Erläuterung bedarf. Danach aber wird

$$\int_c^d f(x)\,dx = \frac{d-c}{6}\left[f(c)+4f\left(\frac{c+d}{2}\right)+f(d)\right]+$$

$$+\frac{1}{12}\int_c^d f'''(\xi)(x-c)(2x-c-d)(x-d)\,dx$$

und hierzu wird alsbald das Restglied näher untersucht werden.

Zunächst sollen nur gleich zwei näherungsweise Quadraturen nach der letzten Regel vollzogen werden.

Es ist

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = (l\,x)_1^2 = l\,2 = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1}+\frac{4}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\right]+\int_1^2 R(x)\,dx =$$

$$= \frac{12{\cdot}5}{18}+\int_1^2 R(x)\,dx = 0{\cdot}694\cdots+\int_1^2 R(x)\,dx,$$

welcher Angabe wir den in den ersten acht Dezimalstellen richtigen Wert des natürlichen Logarithmus von zwei beisetzen:

$$l\,2 = 0{\cdot}693\,147\,18\cdots.$$

Weil

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x$$

ist, so gilt auch

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = \frac{3{\cdot}1415\ldots}{4} = 0{\cdot}7853\cdots.$$

Unsere Formel aber ergibt abgesehen von dem Restgliede

$$\frac{1}{6}\left[\frac{1}{1} + 4\,\frac{1}{1+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right] = \frac{10+32+5}{60} = 0{\cdot}783\cdots.$$

Das der neuen sog. „Simpsonschen Formel“ zuzuordnende Restglied bedarf einer längeren Behandlung, weil man $f'''(\eta)$ nicht vor das Integral setzen darf.

Nimmt man eine Funktion auf:

$$\Phi(x) = g(x) + A(x-c)\left(x - \frac{c+d}{2}\right)(x-d),$$

wo A eine solche Konstante bedeuten soll, daß an der Stelle $\frac{c+d}{2}$

$$\Phi'(x) = f'(x)$$

wird, dann kann man auf Grund des Rolleschen Satzes sagen, es sei:

$$f(x) = \Phi(x) + \frac{f''''(\xi)}{4!}(x-c)\left(x-\frac{c+d}{2}\right)^2(x-d),$$

und hierauf kann man das Integral bilden:

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d g(x)\,dx + A\int_c^d (x-c)\left(x-\frac{c+d}{2}\right)(x-d)\,dx +$$

$$+ \frac{f''''(\eta)}{24}\int_c^d (x-c)\left(x-\frac{c+d}{2}\right)^2(x-d)\,dx.$$

Das Integral an der zweiten Stelle hat den Wert null; das an der dritten Stelle wird nach Einführung der durch die Gleichung

$$x = t\,\frac{d-c}{2} + \frac{d+c}{2}$$

definierten Variablen t, die von -1 bis $+1$ variiert, indem sich x von c bis d ändert, den Wert erhalten

$$\left(\frac{d-c}{2}\right)^5 \int_{-1}^{+1} t^2 (t^2 - 1)\, dt = -\frac{4}{15}\left(\frac{d-c}{2}\right)^5$$

und hiermit wird das ursprüngliche Integral:

$$\int_c^d f(x)\, dx = \frac{1}{3}\left[f(c) + 4 f\left(\frac{c+d}{2}\right) + f(d)\right]\frac{d-c}{2} - \\ - \frac{4}{15}\left(\frac{d-c}{2}\right)^5 \frac{f''''(\eta)}{4!}.$$

Entsprechend der vierten Näherungsfunktion erhält man die „Cotessche Formel"

$$\int_c^d f(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} f\left(c + \nu\frac{d-c}{n}\right)(d-c) A_{n,\nu} + \int_c^d R(x)\, dx,$$

wobei

$$A_{n,\nu} = \int_c^d \frac{(-1)^{n-\nu} n^n \prod_{\mu=0}^{\mu=n}\left(x - c - \mu\frac{d-c}{n}\right)}{\nu!\,(n-\nu)!\,(d-c)^{n+1}\left(x - c - \nu\frac{d-c}{n}\right)}.$$

Hier seien für einige Fälle von n, zunächst für die schon erledigten $n = 1$ und 2 und dann für $n = 3$ und 4 die Koeffizienten $A_{n,\nu}$ angegeben:

$\underline{n=1}: A_{10} = \frac{1}{2},\quad A_{11} = \frac{1}{2},$

$\underline{n=2}: A_{20} = \frac{1}{6},\quad A_{21} = \frac{4}{6},\quad A_{22} = \frac{1}{6},$

$\underline{n=3}: A_{30} = \frac{1}{8},\quad A_{31} = \frac{3}{8},\quad A_{32} = \frac{3}{8},\quad A_{33} = \frac{1}{8},$

$\underline{n=4}: A_{40} = \frac{7}{90},\quad A_{41} = \frac{32}{90},\quad A_{42} = \frac{12}{90},\quad A_{43} = \frac{32}{90},\quad A_{44} = \frac{7}{90}.$

Jetzt sind aber auch die Integrale über die schon angegebenen Reste

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{\nu=0}^{\nu=n}\left(x - c - \nu\frac{d-c}{n}\right)$$

zu ermitteln.

Ist n eine ungerade Zahl und setzt man wieder

$$x = t\,\frac{d-c}{2} + \frac{d+c}{2},$$

so wird

$$\int_c^d R(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{(n+2)!\,n^{n-1}}\left(\frac{d-c}{2}\right)^{n+2}\int_{-1}^{+1}(t^2-1)(n^2t^2-1^2)(n^2t^2-3^2)\ldots$$

$$\ldots[n^2t^2-(n-2)^2]\,f^{(n+1)}(\xi)\,dt = C\left(\frac{d-c}{2}\right)^{n+2}\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!},$$

wo C einen Zahlenfaktor bezeichnen soll.

Im Falle aber n gerade ist, nehme man wieder eine Funktion

$$\Phi(x) = g(x) + A\prod_{\mu=0}^{\mu=n}\left[x - \left(c + \mu\,\frac{d-c}{n}\right)\right]$$

auf und wähle die Konstante A derart, daß $\Phi'(x)$ und $f'(x)$ an der Stelle $\frac{c+d}{2}$ dieselben Werte haben, denn dann kann man wieder nach dem Rolleschen Satze schreiben:

$$f(x) = \Phi(x) + A\prod_{\mu=0}^{\mu=n}\left[x-\left(c+\mu\frac{d-c}{n}\right)\right]\left(x-\frac{c+d}{2}\right)\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}$$

und so wird

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d g_n(x)\,dx + \left(\frac{d-c}{2}\right)^{n+3}\frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!\,n^{n-2}}\,\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{+1}(t^2-1)(t^2)(n^2t^2-2^2)\ldots[n^2t^2-(n-2)^2]\,dt,$$

wo das letzte Integral einem bestimmten Zahlenwerte gleichkommt.

Man kann das Integrationsintervall von c bis d noch in m Teile von $a_{\mu-1}$ bis a_μ ($\mu = 1, 2, \ldots m$) teilen, wo unter $a_0 = c$, unter $a_m = d$ verstanden sein soll, in dem einzelnen Teilintervalle nach Einschaltung äquidistanter Stellen das Teilintegral

$$\int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu} f(x)\,dx$$

in der früheren Art behandeln und hierauf fragen, wie diese m-Teilung zu vollziehen sei, damit die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum werde.

Wenn der μte Flächenstreifen über $a_{\mu-1}$ bis a_μ durch das Rechteck ersetzt wird, dessen Höhe gleich $f(a_{\mu-1})$ ist, und das für jeden unserer Werte μ gilt, so soll (s. S. 171)

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{1}{4} f'^2(\eta_\mu)(a_\mu - a_{\mu-1})^4$$

ein Minimum werden, wobei η_μ eine in dem μten Teilintervalle befindliche mittlere Stelle bedeutet. Bleibt nun in dem Integrationsintervalle (c, d) $f'^2(x) \leqq G$, so wird die frühere Summe

$$\leqq \frac{1}{4} G \sum_{\mu=1}^{\mu=m} (a_\mu - a_{\mu-1})^4,$$

und man kann jetzt fragen, für welche Werte a_μ die Summe am kleinsten wird[1]. Die entsprechende Teilung nennen wir **eine beste**.

Nennt man die Breite des μten Streifens d_μ, so soll

$$d_1^4 + d_2^4 + \cdots + d_m^4$$

ein Minimum werden, daher also auch

$$d_\mu^3 - d_{\mu+1}^3 = 0$$

und

$$d_{\mu+1} = d_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots m - 1)$$

sein, indem die partiellen Ableitungen nach den a_μ verschwinden müssen. Man hat somit

$$a_\mu - a_{\mu-1} = \frac{d - c}{m},$$

d. h. **man wird das Intervall am besten in m gleiche Teile teilen.**

Dieser Satz gilt auch, wenn man den einzelnen Teilstreifen nicht so wie hier durch ein Rechteck ersetzt, sondern in einer der uns bekannten anderen Arten nach der Trapez- oder Simpson- oder Cotesschen Formel behandelt.

In dem ersten hier ausgeführten Falle wird:

---

[1]) Biermann, Monatshefte für Mathematik und Physik, Jahrg. XIV.

$$\int_c^d f(x)\,dx = \frac{d-c}{m}\left[f(c) + f\left(c + \frac{d-c}{m}\right) + \cdots \right.$$

$$\left. + f\left(c + (m-1)\frac{d-c}{m}\right)\right] + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{f'(\eta_\mu)}{2!}\left(\frac{d-c}{m}\right)^2;$$

doch den Rest kann man nach Einführung des arithmetischen Mittels

$$\frac{1}{m}\left[f'(\eta_1) + \cdots + f'(\eta_m)\right] = f'(\eta)$$

in die Form bringen

$$\frac{f'(\eta)}{2m}(d-c)^2,$$

d. h. er wird m-mal kleiner als früher.

Entsprechend der Trapezformel wird man nach der Teilung des ganzen Intervalles in m gleiche Teile ebenso erhalten:

$$\int_c^d f(x)\,dx = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{a_\mu - a_{\mu-1}}{2}\left[f(a_{\mu-1}) + f(a_\mu)\right] -$$

$$-\sum_{\mu=1}^{m} \frac{f''(\eta_\mu)}{12}(a_\mu - a_{\mu-1})^3 =$$

$$= \frac{d-c}{2m}\left[f(c) + 2f\left(c + \frac{d-c}{m}\right) + \cdots \right.$$

$$\left. + 2f\left(c + \overline{m-1}\,\frac{d-c}{m}\right) + f\left(c + m\,\frac{d-c}{m}\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{12}\frac{f''(\eta)}{m^2}(d-c)^3,$$

und der Fehler wird m^2-mal kleiner als bei der nur einmal angewandten Trapezformel.

Und endlich erhält man entsprechend der Simpsonschen Formel bei einer Teilung des ursprünglichen Intervalles in $2m$ gleiche Teile

$$\int_c^d f(x)\,dx = \frac{d-c}{6m}\left[f(c) + 4f\left(c + \frac{1}{2}\frac{d-c}{m}\right) + \right.$$

$$+ 2f\left(c + \frac{d-c}{m}\right) + 4f\left(c + \frac{3}{2}\frac{d-c}{m}\right) + \cdots$$

$$\left. + 2f\left(d - \frac{1}{2}\frac{d-c}{m}\right) + f(d)\right] - \frac{4}{15}\left(\frac{d-c}{2}\right)^5 \frac{f''''(\eta)}{4!\,m^4}$$

und so könnte man fortfahren.

§ 41. Eigenschaften der Simpsonschen Formel[1]).

Wir betrachten noch einmal die näherungsweise Flächenberechnung nach der Trapez- und nach der Simpsonschen Formel.

Legen wir in den Abständen c, $\frac{c+d}{2}$ und d Parallele zur Ordinatenachse, schneiden so aus der Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der Abszissenachse einen „Doppelstreifen" von der Breite $2h = d - c$ mit der Anfangs-, Mittel- und Endordinate y_0, y_1, y_2 aus, so wird das Integral

$$\int_c^d f(x)\,dx = \mathsf{F}$$

nach der Trapezformel näherungsweise durch

$$\frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + y_2),$$

aber nach der Simpsonschen Formel durch

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

gegeben.

Indem man den ersten Ausdruck in der Form schreibt

$$\frac{1}{2}\left(2hy_1 + 2h\frac{y_0+y_2}{2}\right),$$

so nimmt man wahr, daß er das arithmetische Mittel aus einem Parallelogramme M von der Breite $2h$ und von der Mittellinie y_1 als Höhe und einem Trapeze m_1 mit den parallelen Seiten y_0 und y_2 und der Breite $2h$ ist.

Indem man aber den zweiten Ausdruck in der Gestalt schreibt

$$\frac{1}{3}\left[2hy_1 + 2h\left(\frac{y_0+y_1}{2} + \frac{y_1+y_2}{2}\right)\right],$$

so sieht man, daß der in der Simpsonschen Formel gegebene Ausdruck ein Dritteil der Summe aus dem Parallelogramme M von der Breite $2h$ und der Mittellinie y_1 als Höhe und der

---

[1]) Vgl. Serret-Harnack-Bohlmann, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, II. Bd, S. 196, 1899.

zweifachen Summe zweier Trapeze von den Breiten h und den parallelen Seiten y_0 und y_1 bzw. y_1 und y_2 ist. Die Summe beider Trapeze heiße m_2.

Doch wenn man M auch als die Größe eines Trapezes von der Breite $2h$ und der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Endpunkte von y_1 als Seite ansieht, so erscheint die näherungsweise angegebene Fläche als ein Teil der Summe eines Trapezes M, das größer oder kleiner ist als die zu bestimmende Fläche und einer mit einer gewissen Wertigkeitszahl — einem gewissen Gewichte — eingeführten Fläche m gleich m_1 oder m_2, die kleiner oder größer ist als die zu suchende Fläche.

Wenn man hierauf das Intervall von c bis d nicht in 2, sondern in $2m$ gleiche Teile teilt und die Ordinaten in den $2m + 1$ Punkten

$$c + \mu \frac{d - c}{2m} \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots 2m)$$

mit $y_0, y_1, \ldots y_{2m}$ bezeichnet, $\frac{d - c}{2m} = h$ nennt, so wird, wenn man die früheren Darstellungen auf jeden Teil anwendet, nach der Trapezformel die Fläche näherungsweise durch

$$\frac{1}{2}\left[2h(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1}) + 2h\left(\frac{y_0 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_4}{2} + \cdots \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{y_{2m-2} + y_{2m}}{2}\right)\right]$$

und nach der Simpsonschen Formel durch

$$\frac{1}{3}\left[2h(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1}) + \right.$$
$$\left. + 2h\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \cdots + \frac{y_{2m-1} + y_{2m}}{2}\right)\right]$$

ausgedrückt.

Diese Wahrnehmung führt uns zu der Frage, wie man das Verhältnis der Differenz der den Doppelstreifen F übertreffenden oder bzw. nicht erreichenden Größe M und dieser selbst und der Differenz von F und einer Fläche m, deren Größe kleiner bzw. größer als F ist, wählen müsse:

$$\frac{M - \mathsf{F}}{\mathsf{F} - m} = z(x),$$

damit hier die Trapez- oder Simpsonsche Formel für F hervorgehe.

Wenn man dieses Verhältnis Stelle für Stelle anzugeben vermöchte, so könnte man auch eine Darstellung einer aus Doppelstreifen zusammengesetzten Fläche F angeben, doch wollen wir hier nur zeigen, daß das Verhältnis $z(x)$ im Falle der Trapez- und Simpsonschen Formel konstant gleich eins oder zwei wird.

Das erste folgt aus der Beschaffenheit von M und m_1, indem wir h nach null übergehen lassen. Zum Beweise, daß das Verhältnis der Fehler $M - \mathsf{F}$ und $\mathsf{F} - m_2$ gleich zwei sei, vergrößern wir die Fläche

$$F(x) = \int_c^x f(x)\,dx,$$

indem wir x um $2h$ wachsen lassen, und bestimmen die entsprechenden Größen F, M, m_2.

Weil nun $F'(x) = f(x)$ gilt, so ergeben sich die folgenden Darstellungen:

$$\mathsf{F} = F(x+2h) - F(x) = 2h\,f(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f'(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f''(\xi);$$

$$M = 2h\,f(x+h) = 2h\left(f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(\xi_1)\right),$$

$$m_2 = \frac{h}{2}\,[f(x) + 2f(x+h) + f(x+2h)] =$$

$$= \frac{h}{2}\left(4f(x) + \frac{4}{1!} f'(x)h + h^2[f''(\xi') + 2f''(\xi'')]\right),$$

wo ξ, ξ_1, ξ', ξ'' Mittelwerte zwischen x und $x + 2h$ bedeuten.

Wenn man aus diesen Werten das frühere Verhältnis bildet, so entsteht

$$z(x) = \frac{f''(\xi_1) - \frac{4}{3} f''(\xi)}{\frac{4}{3} f''(\xi) - \frac{1}{2} f''(\xi') - f''(\xi'')}.$$

Doch wenn man nun h nach null, d. h. die Mittelwerte nach x konvergieren läßt, so entsteht

$$\lim_{h=0} z = \frac{1 - \frac{4}{3}}{\frac{4}{3} - \frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{2}{6}}{\frac{8-3-6}{6}} = 2,$$

was zu beweisen war.

Die durch diese Betrachtung sehr bedeutungsvolle Simpsonsche Formel läßt noch eine wichtige geometrische Deutung zu.

Legt man durch je drei Punkte einer Kurve $y = f(x)$, deren Abszissen

$$x_1 = x, \quad x_2 = x + h, \quad x_3 = x + 2h$$

seien, eine Parabel, deren Hauptdurchmesser parallel der y Achse ist, so wird der Doppelstreifen von der Breite $2h$ zwischen der Parabel und der Abszissenachse genau gleich

$$\frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3).$$

In der Tat die Gleichung der Parabel von der genannten Lage heißt

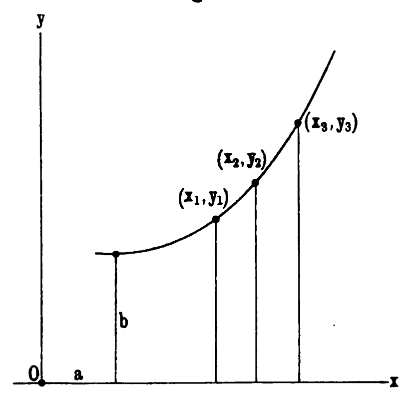
$$2p(y - b) = (x - a)^2,$$

wo die Konstanten a, b, p entsprechend den Bedingungen zu bestimmen sind, daß die Parabel durch die drei Punkte

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3)$$

hindurchgeht. Der Flächeninhalt des Doppelstreifens wird, wie die Figur zeigt,

Fig. 25.



$$2hb + \frac{1}{3}[(x_3 - a)(y_3 - b) - (x_1 - a)(y_1 - b)] =$$

$$= 2hb + \frac{1}{3}\frac{1}{2p}[(x_3 - a)^3 - (x_1 - a)^3] =$$

$$= 2hb + \frac{1}{3}\frac{h}{2p}[(x_1 - a)^2 + 4(x_2 - a)^2 + (x_3 - a)^2] =$$

$$= 2hb + \frac{h}{3}[(y_1 - b) + 4(y_2 - b) + (y_3 - b)] =$$

$$= \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3).$$

Danach wird man den Kurvenbogen über der Strecke von c bis d durch den Bogen einer solchen Parabel ersetzen, deren Hauptdurchmesser auf der Strecke cd (und der Abszissenachse) senkrecht steht, und die durch die Endpunkte des gegebenen Kurvenbogens sowie auch durch den Kurvenpunkt hindurchgeht, dem die Abszisse $\frac{c+d}{2}$ zugehört, und nun die zwischen ihm und der Abszissenachse befindliche Fläche zur näherungsweisen Quadratur angeben.

Ebenso wird man entsprechend einer m-Teilung des Intervalles cd den einzelnen Streifen in der genannten Weise durch einen anderen ersetzen und diese vereinigen.

§ 42. Näherungsweise Kubatur[1]).

Die bezüglich einer näherungsweisen Quadratur vollzogenen Betrachtungen sollen auch im Falle einer Kubatur ausgeführt werden, soweit sie analog sind denen über die Simpsonsche Formel.

Soll man das Doppelintegral

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta f(x, y)\, dx\, dy$$

dadurch näherungsweise berechnen, daß man $f(x, y)$ durch die ganze rationale Funktion $g(x, y)$ ersetzt, die an den sechs Stellen

$$\begin{array}{lll} (a, b), & \left(\frac{a+\alpha}{2}, b\right), & (\alpha, b), \\ \left(a, \frac{b+\beta}{2}\right), & \left(\frac{a+\alpha}{2}, \frac{b+\beta}{2}\right), & \\ (a, \beta) & & \end{array}$$

die Werte

$$\begin{array}{lll} \eta_{00}, & \eta_{10}, & \eta_{20}, \\ \eta_{01}, & \eta_{11}, & \\ \eta_{02} & & \end{array}$$

annimmt, welche Werte mit denen von $f(x, y)$ an den genannten Stellen übereinkommen, so beachte man Folgendes: Die Funktion $g(x, y)$ nimmt an den Stellen

$$\left(\alpha, \frac{b+\beta}{2}\right), \quad \left(\frac{a+\alpha}{2}, \beta\right), \quad (\alpha, \beta)$$

[1]) Biermann, l. c. (s. S. 177).

Werte an $\eta_{21}, \eta_{12}, \eta_{22}$, die mit den früheren sechs Werten durch die folgenden Gleichungen zusammenhängen:

$$(\eta_{00} - 2\eta_{01} + \eta_{02}) - 2(\eta_{10} - 2\eta_{11} + \eta_{12}) + \\ + (\eta_{20} - 2\eta_{21} + \eta_{22}) = 0,$$

$$(\eta_{00} - 2\eta_{10} + \eta_{20})(b + 3\beta) - 4(\eta_{01} - 2\eta_{11} + \eta_{21})(b + \beta) + \\ + (\eta_{02} - 2\eta_{12} + \eta_{22})(3b + \beta) = 0,$$

$$(\eta_{00} - 2\eta_{01} + \eta_{02})(a + 3\alpha) - 4(\eta_{10} - 2\eta_{11} + \eta_{12})(a + \alpha) + \\ + (\eta_{20} - 2\eta_{21} + \eta_{22})(3a + \alpha) = 0,$$

denn das sind die Relationen, die in unserem Falle nur ausdrücken, daß in der erweiterten Lagrangeschen Interpolationsformel für $g(x, y)$ Glieder von höherer als der zweiten Dimension nicht vorkommen (s. S. 146).

Nach der Aufnahme der zuletzt eingeführten drei Größen η wird (vgl. S. 141)

$$g(x, y) = \frac{(x - \alpha)(2x - a - \alpha)}{(\alpha - a)^2} \left[\eta_{00} \frac{(y - b)(2y - b - \beta)}{(\beta - b)^2} - \right. \\ - 4\eta_{01} \frac{(y - \beta)(y - b)}{(\beta - b)^2} + \eta_{02} \left. \frac{(2y - b - \beta)(y - b)}{(\beta - b)_2} \right] - \\ - 4 \frac{(x - a)(x - \alpha)}{(\alpha - a)^2} \left[\eta_{10} \frac{(y - b)(2y - \beta - b)}{(\beta - b)^2} - \right. \\ - 4\eta_{11} \frac{(y - \beta)(y - b)}{(\beta - b)^2} + \eta_{12} \left. \frac{(2y - b - \beta)(y - \beta)}{(\beta - b)^2} \right] + \\ + \frac{(2x - a - \alpha)(x - a)}{(\alpha - a)^2} \left[\eta_{20} \frac{(y - \beta)(2y - \beta - b)}{(\beta - b)^2} - \right. \\ - 4\eta_{21} \frac{(y - \beta)(y - b)}{(\beta - b)^2} + \eta_{22} \left. \frac{(2y - b - \beta)(y - b)}{(\beta - b)^2} \right].$$

Weil die Integrale

$$\int_c^d (2u - c - d)(u - d)\,du = \frac{1}{6}(d - c)^3,$$

$$-4\int_c^d (u - d)(u - c)\,du = \frac{4}{6}(d - c)^3,$$

$$\int_c^d (2u - c - d)(u - c)\,du = \frac{1}{6}(d - c)^3$$

sind, so wird nach Einführung der Zeichen

$$\alpha - a = 2h, \quad \beta - b = 2k$$

näherungsweise

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{k}{3}\left(\frac{h}{3}(\eta_{00} + 4\eta_{10} + \eta_{20}) + 4\,\frac{h}{3}(\eta_{01} + 4\eta_{11} + \eta_{21}) + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{3}(\eta_{02} + 4\eta_{12} + \eta_{22})\right) =$$
$$= \frac{h}{3}\left(\frac{k}{3}(\eta_{00} + 4\eta_{01} + \eta_{02}) + 4\,\frac{k}{3}(\eta_{10} + 4\eta_{11} + \eta_{12}) + \right.$$
$$\left. + \frac{k}{3}(\eta_{20} + 4\eta_{21} + \eta_{22})\right).$$

Dieser Ausdruck für das Volumen V von dem rechteckigen Bereiche der (x, y) Ebene bis zu der Fläche mit der Gleichung $z - f(x, y) = 0$ kann zufolge der Beziehungen zwischen den η Werten natürlich auch in solcher Gestalt geschrieben werden, daß nur sechs der Werte $\eta_{\mu\nu}$ in dem Ausdrucke enthalten sind.

Bezeichnet man die nach der Simpsonschen Regel berechneten Inhalte der Flächen zwischen der (x, y) Ebene und der Fläche $z - f(x, y) = 0$, die auch zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = \alpha$ liegen, aber durch die Ebenen $y = b$, $y = \frac{b + \beta}{2}$ und $y = \beta$ ausgeschnitten werden, mit F_1, F_2 und F_3, so wird das Volumen

$$V = \frac{k}{3}(F_1 + 4F_2 + F_3).$$

Wenn man danach für das näherungsweise zu bestimmende Volumen als eine obere und untere Grenze einführt:

$$M = kF_2, \quad m = \frac{k}{2}\left(\frac{F_1 + F_2}{2} + \frac{F_2 + F_3}{2}\right)$$

oder umgekehrt, so wird

$$V = \frac{M + 2m}{3}.$$

Eine gleiche Form ist dieser Regel auch zu geben, wenn man die durch die Ebenen $x = a$, $x = \frac{a + \alpha}{2}$, $x = \alpha$ auszuschneidenden Flächenteile zwischen den Ebenen $y = b$ und $y = \beta$

einführt. Denn heißen diese Φ_1, Φ_2, Φ_3, dann wird auch

$$V = \frac{h}{3}(\Phi_1 + 4\Phi_2 + \Phi_3).$$

Eine passende Anwendung dieser der Simpsonschen Formel nachgebildeten Näherungsformel wird man machen, indem man mit Hilfe einer Karte, auf der Isohypsen verzeichnet sind, äquidistante Querschnitte eines Gebirgsstockes oder einer Terrainwelle bestimmt, die Größe dieser Querschnitte näherungsweise ermittelt und dann das Volumen näherungsweise berechnet.

Doch bei der näherungsweisen Kubatur von $f(x, y)$ mit Hilfe der Näherungsfunktion $g(x, y)$ ist noch das Restglied hinzuzufügen:

$$\frac{1}{3!}\int_a^\alpha\int_b^\beta (x-a)\left(x - \frac{a+\alpha}{2}\right)(x-\alpha) f'''_{xxx}(\xi, \eta)\, dx\, dy +$$

$$+ \frac{3}{3!}\int_a^\alpha\int_b^\beta (x-a)\left(x - \frac{a+\alpha}{2}\right)(y-b) f'''_{xxy}(\xi, \eta)\, dx\, dy +$$

$$+ \frac{3}{3!}\int_a^\alpha\int_b^\beta (x-a)(y-b)\left(y - \frac{b+\beta}{2}\right) f'''_{xyy}(\xi, \eta)\, dx\, dy +$$

$$+ \frac{1}{3!}\int_a^\alpha\int_b^\beta (y-b)\left(y - \frac{b+\beta}{2}\right)(y-\beta) f'''_{yyy}(\xi, \eta)\, dx\, dy,$$

das hier näher zu bestimmen nach den Erwägungen über das Restglied in der Simpsonschen Formel nicht nötig ist.

Man kann die frühere Formel aber auch mit einem anderen geometrischen Gebilde in Verbindung setzen, sowie die Simpsonsche Formel mit der Bestimmung einer durch einen Parabelbogen begrenzten Fläche verbunden wurde.

Wenn man nämlich die Kubatur

$$V = \int_a^\alpha\int_b^\beta z\, dx\, dy = \int_a^\alpha\int_b^\beta (Ax^2 + By^2)\, dx\, dy$$

ausführt, so entsteht

$$V = \frac{1}{3}(\beta - b)(\alpha - a)(A\alpha^2 + B\beta^2 + Aa\alpha + Bb\beta + Aa^2 + Bb^2) =$$

$$= \frac{(\beta - b)(\alpha - a)}{6.6}[12\, z(\alpha, \beta) + 12\, z(a, b) + 12(A\alpha a + Bb\beta)],$$

wo $z(\alpha, \beta)$ und $z(a, b)$ die Werte von $z = Ax^2 + By^2$ an den Stellen (α, β), (a, b) bezeichnen.

Der letzte Ausdruck für V ist aber auch in folgender Form zu schreiben:

$$V = \frac{\alpha - a}{6} \frac{\beta - b}{6} \left[\left(z(a,b) + 4z\left(\frac{a+\alpha}{2}, b\right) + z(\alpha, b) \right) + \right.$$
$$+ 4\left(z\left(a, \frac{b+\beta}{2}\right) + 4z\left(\frac{a+\alpha}{2}, \frac{b+\beta}{2}\right) + z\left(\alpha, \frac{b+\beta}{2}\right) \right) +$$
$$\left. + \left(z(a, \beta) + 4z\left(\frac{a+\alpha}{2}, \beta\right) + z(\alpha, \beta) \right) \right]$$

und man sieht, daß dieser Ausdruck der Form nach erhalten bleibt, wenn man die Fläche mit der Gleichung $z = Ax^2 + Bx^2$ einer Parallelverschiebung unterwirft und statt der hier gebrauchten z Werte die entsprechenden Abmessungen für die Entfernungen derselben Flächenpunkte von der festen (x, y) Ebene einführt.

Wenn man danach durch sechs der neun Punkte

$$(a, b, z_{00}), \quad \left(\frac{a+\alpha}{2}, b, z_{10}\right), \quad (\alpha, b, z_{20}),$$
$$\left(a, \frac{b+\beta}{2}, z_{01}\right), \quad \left(\frac{a+\alpha}{2}, \frac{b+\beta}{2}, z_{11}\right), \quad \left(\alpha, \frac{b+\beta}{2}, z_{21}\right),$$
$$(a, \beta, z_{02}), \quad \left(\frac{a+\alpha}{2}, \beta, z_{12}\right), \quad (\alpha, \beta, z_{22}),$$

wo die Bezeichnung der z an den den vorangehenden x und y Werten entsprechenden z Werten keiner Erklärung bedarf, ein Paraboloid legt — es kann elliptisch oder hyperbolisch ausfallen —, dessen Achse der z Achse parallel ist, so ist das Volumen von dem rechteckigen Bereiche der (x, y) Ebene mit den Ecken

$$(a, b), \quad (\alpha, b), \quad (a, \beta), \quad (\alpha, \beta)$$

bis zu dem Paraboloide durch den Ausdruck gegeben

$$\frac{(\alpha - a)(\beta - b)}{6 . 6} [(z_{00} + 4z_{10} + z_{20}) + 4(z_{01} + 4z_{11} + z_{21}) +$$
$$+ (z_{02} + 4z_{12} + z_{22})],$$

und dieser Ausdruck stimmt mit dem früheren überein.

§ 43. Besondere Wahl der ganzen rationalen Näherungsfunktion zum Behufe der besten Quadratur.

Zur näherungsweisen Quadratur von $f(x)$, ausgedehnt über ein Intervall von c bis d, soll noch das folgende Problem behandelt werden [1]).

Es sind Stellen $a_1, a_2, \dots a_m$ in dem Intervalle von c bis d, an denen eine ganze rationale Funktion $g(x)$ samt ihrer ersten Ableitung $g'(x)$ mit $f(x)$ bzw. $f'(x)$ übereinstimmen soll, derart zu finden, daß der Fehler bei der näherungsweisen Quadratur, der nun durch

$$\frac{f^{(2m)}(\eta)}{(2m)!}\int_c^d \prod_{\mu=1}^{m}(x-a_\mu)^2\,dx$$

auszudrücken ist, ein Minimum werde.

Setzt man

$$x-c=(d-c)t,\quad a_\mu-c=(d-c)t_\mu,\quad (\mu=1,2,\dots m),$$

so kann man auch sagen, es solle

$$\frac{f^{(2m)}(\eta)(d-c)^{2m+1}}{(2m)!}\int_0^1 \prod_{\mu=1}^{\mu=m}(t-t_\mu)^2\,dt$$

ein Minimum werden, denn t durchläuft die Werte von 0 bis 1, indem sich x von c bis d verändert.

Aus der Gestalt des Restgliedes ist unmittelbar zu ersehen, daß dieses verschwindet, wenn $f(x)$ eine ganze rationale Funktion von niedrigerem Grade als dem Grade $2m$ ist, indem $f^{(2m)}(\eta)$ dann null ist; im Falle aber $f(x)$ eine ganze rationale Funktion vom $2m$ten Grade ist, so wird $f^{(2m)}(\eta)$ eine Konstante und das Restglied wird dadurch einen kleinsten Wert erlangen, daß man in dem Integrale die Werte $t_1, t_2, \dots t_m$ oder früher die Stellen $a_1, a_2, \dots a_m$ passend wählt.

Wenn diese Stellen derart gewählt sind, so heiße die Quadratur mit Hilfe der entsprechenden Näherungsfunktion $g(x)$ eine beste.

---

[1]) Biermann, Monatshefte für Mathematik und Physik, Jahrg. XIV (l. c., s. S. 177).

In jedem anderen Falle aber wird darum, weil η eine zwischen den Stellen a_μ und x gelegene mittlere Stelle des Integrationsintervalles ist, der Fehler sowohl durch den Wert von $f^{(2m)}(\eta)$ als auch durch den Wert des Integrales von den Werten a_μ abhängig sein[1]. Darum aber werden wir uns mit diesem Falle nicht weiter beschäftigen, sondern nehmen es mit dem zweiten Falle, dem der besten Quadratur zu tun.

Führt man für die Summe der Kombinationen μter Klasse ohne Wiederholungen aus den Größen t_μ das Zeichen T_μ ein, setzt also

$$\begin{aligned} T_1 &= t_1 + t_2 + \cdots + t_m, \\ T_2 &= t_1 t_2 + t_1 t_3 + \cdots + t_{m-1} t_m, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ T_m &= t_1 t_2 \ldots t_m, \end{aligned}$$

so wird das Produkt unter dem Integrale, d. i. das Quadrat von

$$t^m - T_1 t^{m-1} + T_2 t^{m-2} - \cdots + (-1)^m T_m \equiv U(t),$$

darum weil $U(t)$ gleich dem Produkte der Linearfaktoren $t - t_\mu$ ist, in der Form zu schreiben sein:

$$\begin{aligned} t^{2m} - 2t^{2m-1} T_1 + t^{2m-2}(T_1^2 + 2T_2) - t^{2m-3}(2T_3 + 2T_1 T_2) + \cdots \\ + (-1)^{2m-1} t(2T_m T_{m-1}) + T_m^2, \end{aligned}$$

und man kann das bestimmte Integral auswerten; es hat den Wert

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m+1} - \frac{2T_1}{2m} + \frac{T_1^2 + 2T_2}{2m-1} - \frac{2T_3 + 2T_1 T_2}{2m-2} + \cdots \\ + (-1)^{2m-1} \frac{2T_m T_{m-1}}{2} + \frac{T_m^2}{1}. \end{aligned}$$

Damit dieser Ausdruck bei passender Wahl von $t_1, t_2, \ldots t_m$ einen extremen Wert erhält, müssen seine ersten Ableitungen nach den t_μ verschwinden; die nach t_μ ist aber bis auf den Faktor 2:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T_1}{\partial t_\mu}\left[\frac{T_1}{2m-1} - \frac{T_2}{2m-2} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{T_m}{m} - \frac{1}{2m}\right] - \\ -&\frac{\partial T_2}{\partial t_\mu}\left[\frac{T_1}{2m-2} - \frac{T_2}{2m-3} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{T_m}{m-1} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2m-1}\right] + \end{aligned}$$

[1]) Mit Benze.

$$+\frac{\partial T_3}{\partial t_\mu}\left[\frac{T_1}{2m-3}-\frac{T_2}{2m-4}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{T_m}{m-2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2m-2}\right]-$$

. . . .

$$+\frac{\partial T_m}{\partial t_\mu}\left[\frac{T_1}{m}-\frac{T_2}{m-1}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{T_m}{1}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{m+1}\right](-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]},$$

wo $\left[\frac{m}{2}\right]$ die größte in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

Bildet man so die m ersten Ableitungen nach $t_1, t_2, \ldots t_m$ und setzt sie alle null, so erhält man m in den letztvorkommenden Klammergrößen homogene und lineare Gleichungen.

Die Determinante dieser Gleichungen lautet abgesehen vom Zeichen:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial t_1}, & \frac{\partial T_2}{\partial t_1}, & \cdots & \frac{\partial T_m}{\partial t_1} \\ \frac{\partial T_1}{\partial t_2}, & \frac{\partial T_2}{\partial t_2}, & \cdots & \frac{\partial T_m}{\partial t_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial T_1}{\partial t_m}, & \frac{\partial T_2}{\partial t_m}, & \cdots & \frac{\partial T_m}{\partial t_m} \end{vmatrix},$$

und es soll gezeigt werden, daß sie von null verschieden ist und somit die m Größen T_μ durch Auflösung der linearen Gleichungen

$$\frac{T_1}{2m-1}-\frac{T_2}{2m-2}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{T_m}{m}=\frac{1}{2m},$$
$$\frac{T_1}{2m-2}-\frac{T_2}{2m-3}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{T_m}{m-1}=\frac{1}{2m-1},$$

. . . .

$$\frac{T_1}{m}-\frac{T_2}{m-1}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{T_m}{1}=\frac{1}{m+1}$$

zu bestimmen sein werden, womit sich dann die Gleichung $U(t)=0$ angeben läßt und die Vorschrift zur Ermittelung der verlangten Größen a_μ zu Ende geführt sein wird.

Die genannte Determinante wird nun nur null, wenn zwei der Größen t_μ einander gleich werden, was damit ausgeschlossen wurde, daß man m Stellen a_μ in das Intervall von c bis d einzuschalten aufgab.

In der Tat es ist

$$\frac{\partial T_1}{\partial t_\mu} = 1,$$
$$\frac{\partial T_2}{\partial t_\mu} = T_1 - t_\mu,$$
$$\frac{\partial T_3}{\partial t_\mu} = T_2 - t_\mu T_1 + t_\mu^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial T_m}{\partial t_\mu} = T_{m-1} - t_\mu T_{m-2} + \cdots + (-1)^{m-1} t_\mu^{m-1},$$

und wenn man nach Substitution dieser Ausdrücke in die Determinante die Elemente der ersten Zeile von den entsprechenden aller anderen abzieht, wobei der Wert der Determinante bekanntlich nicht verändert wird, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} 1, & T_1 - t_1, & T_2 - t_1 T_1 + t_1^2, & \cdots \frac{\partial T_m}{\partial t_1} \\ 0, & t_1 - t_2, & (t_2^2 - t_1^2) + T_1 (t_2 - t_1), & \cdots \mathsf{T}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ 0, & t_1 - t_{m-1}, & (t_{m-1}^2 - t_1^2) + T_1 (t_{m-1} - t_1), & \cdots \mathsf{T}_{m-1} \\ 0, & t_1 - t_m, & (t_m^2 - t_1^2) + T_1 (t_m - t_1), & \cdots \mathsf{T}_m \end{vmatrix},$$

wo

$$\mathsf{T}_\mu = (-1)^{m-1} \left(t_\mu^{m-1} - t_1^{m-1}\right) +$$
$$+ (-1)^{m-1} T_1 \left(t_\mu^{m-2} - t_1^{m-2}\right) + \cdots + T_{m-1} (t_u - t_1)$$
$$(\mu = 2, 3, \ldots m)$$

ist.

Nun aber ist auf Grund weiterer bekannter Sätze zu sehen, daß die Unterdeterminante des ersten Elementes der ersten Zeile nichts anderes ist als das Produkt aller Differenzen $t_\mu - t_{\mu'}$, und deshalb ist die Determinante nicht null.

Eine direkte Behandlung der linearen Gleichungen in den Größen T_μ führte Umständlichkeiten und Schwierigkeiten mit

sich; man gehe darum von der Bemerkung aus, daß die linearen Gleichungen keine anderen sind als die folgenden

$$\int_0^1 U(t)\, t^{m-1}\, dt = 0, \quad \int_0^1 U(t)\, t^{m-2}\, dt = 0, \ \dots \int_0^1 U(t)\, dt = 0,$$

daß aber danach auch das Integral

$$\int_0^1 U(t)\, v(t)\, dt$$

jedesmal null ist, wenn $v(t)$ irgend eine ganze rationale Funktion von niedrigerem Grade als dem $m$ten bedeutet.

Dann wird — wie nebenbei bemerkt sei — das Integral über eine ganze rationale Funktion $g(x)$, die an den hier vorkommenden Stellen a_μ die Werte $f(a_\mu)$ besitzt, und deren erste Ableitung $g'(x)$ ebendort die Werte $f'(a_\mu)$ hat, dann wenn

$$\varphi(x) = \prod_{\mu=1}^{\mu=m} (x - a_\mu)$$

bedeutet, durch den Ausdruck gegeben:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=m} f(a_\mu) \int_c^d \frac{\varphi(x)}{\varphi'(a_\mu)(x - a_\mu)}\, dx,$$

denn die an früherer Stelle (s. S. 102) gemachte Angabe zeigt, daß $g(x)$ nur noch Glieder der Gestalt enthält:

$$C_\mu \frac{\varphi^2(x)}{\varphi'^2(a_\mu)(x - a_\mu)};$$

wo C_μ eine Konstante ist; doch das Integral darüber wird null, wenn die Stellen a_μ mit den früher definierten Werten t_μ in der folgenden Weise zusammenhängen:

$$a_\mu - c = (d - c)\, t_\mu.$$

Danach werden die Stellen a_μ auch diejenigen, für die die Formel

$$\int_c^d f(x)\, dx = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{f(a_\mu)}{\varphi'(a_\mu)} \int_c^d \frac{\varphi(x)}{x - a_\mu}\, dx$$

bei jeder ganzen rationalen Funktion $f(x)$ von niedrigerem Grade als dem $2m$ten völlig genau ist[1]).

[1]) Siehe Gauss, Ges. Werke, Bd. III (l. c.).

Jetzt soll es sich darum handeln, die Funktion $U(t)$ wirklich herzustellen. Man führe zu diesem Zwecke die Hilfsfunktion ein:

$$\Omega(t) = \frac{t^m}{m!} U(0) + \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} U'(0) + \cdots + \frac{t^{2m}}{2m!} U^{(m)}(0).$$

Man sieht, daß

$$\Omega(0) = 0, \quad \Omega'(0) = 0, \quad \ldots \quad \Omega^{(m-1)}(0) = 0$$

ist, also die ganze rationale Funktion $\Omega(t)$ die m-fache Nullstelle $t = 0$ besitzt und daß

$$\Omega^{(m)}(t) = U(0) + U'(0)\frac{t}{1!} + U''(0)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$
$$+ U^{(m)}(0)\frac{t^m}{m!} \equiv U(t)$$

ist [1]).

Daher kann man auch schreiben, es sei

$$\int_0^1 \Omega^{(m)}(t)\, v(t)\, dt = 0$$

und zwar für jede ganze rationale Funktion $v(t)$ von kleinerem Grade als m.

Die Anwendung der partiellen Integration ergibt nun aber:

$$\int_0^1 \Omega^{(m)}(t)\, v(t)\, dt = \Omega^{(m-1)}(1)\, v(1) - \int_0^1 \Omega^{(m-1)}(t)\, v'(t)\, dt =$$

$$= \Omega^{(m-1)}(1)\, v(1) - \Omega^{(m-2)}(1)\, v'(1) + \int_0^1 \Omega^{(m-2)}(t)\, v''(t)\, dt =$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \Omega^{(m-1)}(1)\, v(1) - \Omega^{(m-2)}(1)\, v'(1) + \cdots$$
$$+ (-1)^{m-1}\, \Omega(1)\, v^{(m-1)}(1) = 0,$$

was auch $v(t)$ für eine ganze rationale Funktion vom $\overline{m-1}$sten Grade sein mag. Wegen der Willkürlichkeit der m Konstanten in $v(t)$ erheischt die letzte Relation die m Aussagen

$$\Omega^{(m-1)}(1) = \Omega^{(m-2)}(1) = \cdots = \Omega'(1) = \Omega(1) = 0,$$

d. h. $\Omega(t)$ besitzt auch die m-fache Nullstelle $t = 1$, und die ganze rationale Funktion $2m$ten Grades $\Omega(t)$ kann nur die Form haben:

[1]) Markoff, Differenzenrechnung, S. 65.

$$\Omega(t) = C t^m (t - 1)^m,$$

wobei C eine noch unbestimmte Konstante ist.

Doch $U(t)$ ist die $m$te Ableitung von $\Omega(t)$ und besitzt das Glied höchsten Grades $1 . t^m$.

Man hat somit

$$U(t) = C \frac{d^m}{d t^m} [t^m (t - 1)^m],$$

und danach

$$C = \frac{m!}{2m!}.$$

In den Fällen $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ findet man, daß die Gleichung $U(t) = 0$ heißt:

$$t - \frac{1}{2} = 0,$$

$$t^2 - t + \frac{1}{6} = 0,$$

$$t^3 - \frac{3}{2} t^2 + \frac{3}{5} t - \frac{1}{20} = 0.$$

Jetzt ist ferner noch zu zeigen, daß die Gleichung $U(t) = 0$ zwischen 0 und 1 m reelle Wurzeln hat.

Ist t_μ eine solche reelle Wurzel, so wird $U(t)$ beim Durchgange von t durch t_μ sein Zeichen wechseln, doch das Produkt

$$(t - t_\mu)\, U(t)$$

wird hierbei sein Zeichen nicht wechseln.

Hätte nun $U(t)$ nur $l < m$ reelle zwischen null und eins liegende Nullstellen — $t_1, t_2, \ldots t_l$, — so würde das Produkt

$$(t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_l)\, U(t)$$

sein Zeichen nicht wechseln, wenn t von 0 bis 1 übergeht, und es würde das Integral

$$\int_0^1 (t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_l)\, U(t)\, dt$$

nicht verschwinden können.

Nach dem früheren Satze über das Verschwinden des Integrales

$$\int_0^1 U(t)\, v(t)\, dt$$

sieht man somit, daß man $l = m$ setzen müsse, wenn man ein nicht verschwindendes Integral der früheren Form zustande bringen will. Die Gleichung $U(t) = 0$ hat somit wirklich innerhalb des Integrationsintervalles so viele reelle Wurzeln als ihr Grad anzeigt[1]).

Nun läßt sich auch leicht berechnen, daß

$$T_\mu = \binom{m}{\mu} \frac{(2m-\mu)(2m-\mu-1)\ldots(m-\mu+1)}{2m(2m-1)\ldots(m+1)}$$

wird, und darauf läßt sich der Fehler bestimmen:

$$\frac{f^{(2m)}(\eta)}{(2m)!}(d-c)^{2m+1}\int_0^1 \prod_{\mu=1}^{\mu=m}(t-t_\mu)^2\,dt =$$

$$= \frac{f^{(2m)}(\eta)}{(2m)!}(d-c)^{2m+1}\frac{1}{2m+1}\left(\frac{m!^2}{(2m)!}\right)^2,$$

der, wie hier nur mitgeteilt werde, kein größter ist.

Insbesondere wird für $m = 1, 2, 3$ der Faktor von

$$\frac{f^{(2m)}(\eta)}{(2m)!}(d-c)^{2m+1}$$

der Reihe nach

$$\frac{1}{12}, \ \frac{1}{180}, \ \frac{1}{2800}.$$

In dem besonderen Falle $m = 1$ erhält man die schon früher (s. S. 172) angegebene Formel

$$\int_c^d f(x)\,dx = (d-c)f\left(\frac{c+d}{2}\right) + \frac{(d-c)^3}{24}f''(\eta).$$

Doch kann man jetzt hinzufügen: wenn man ein zwischen den Geraden $x = c$ und $x = d$ in stetigem Verlaufe sich erstreckendes Stück der Kurve $y = f(x)$, welches keine zur y Achse parallele Tangente besitze, durch das zwischen denselben Geraden liegende Stück der die Kurve im Punkte

$$\left[\frac{c+d}{2}, \ f\left(\frac{c+d}{2}\right)\right]$$

berührenden Geraden ersetzt (siehe Fig. 26 a. f. S.), so wird der Fehler, in dem Falle als $f(x)$ nur vom zweiten Grade oder $f''(x)$ in dem Intervalle (c, d) konstant ist, kleiner, als wenn man das Kurvenstück durch eine in

---

[1]) Der Rollesche Satz zeigte hier angewandt dasselbe Ergebnis.

einem anderen Punkte $[a_1, f(a_1)]$ berührende Tangente zwischen den Geraden $x = c$ und $x = d$ ersetzt.

In dem letzteren Falle wird der Fehler, den man ja nach früheren Erörterungen durch ein Integral anzugeben versteht, schließlich

$$\frac{(d-c)^3}{24} f''(\eta) + \frac{d-c}{8} f''(\eta)\,[(d-c)^2 - 4\,(a_1 - c)\,(d - a_1)].$$

Man sieht auch hier, daß der Fehler unter den genannten Voraussetzungen am kleinsten wird, wenn a_1 in den Halbierungspunkt der Strecke von c bis d fällt[1]).

Man könnte nun auch eine entsprechende Betrachtung betreffs der Kubatur machen, wenn man nur zuerst die Näherungsfunktion $g(x, y)$ herstellte, die an einer Reihe von Stellen samt ihren ersten partiellen Ableitungen mit $f(x, y)$ und dessen partiellen Ableitungen übereinstimmt. Das soll hier nicht ausgeführt werden, es genüge der unserem letzten Satze analoge Satz:

Fig. 26.

Will man den zwischen einem Rechtecke der (x, y) Ebene und der Fläche $z - f(x, y) = 0$ befindlichen Block näherungsweise durch den bis zur Tangentenebene in einem der Begrenzung des Blockes angehörenden Flächenpunkte ersetzen, so macht man dann den geringsten Fehler, wenn man den dem Mittelpunkte des Rechteckes zugehörenden Flächenpunkt zum Berührungspunkte der Tangentenebene macht, vorausgesetzt, daß die Fläche von der zweiten Ordnung ist oder die zweiten partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ in dem Rechtecke konstant sind.

§ 44. Näherungsweise Rektifikation und Komplanation.

Durch die Integrale

$$\int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \quad \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$$

---

[1]) Die Figur entspricht nicht unserer Voraussetzung, läßt aber Neues ersehen.

beziehungsweise

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, d x\, d y$$

werden bekanntlich die Größe eines Bogens einer ebenen oder einer Raumkurve bezüglich die Größe einer Fläche ausgedrückt, und indem man sie als Integrale zur Bestimmung einer ebenen Fläche oder eines Volumens auffaßt:

$$\int\limits_a^x Y\, d x, \quad \iint\limits_{(S)} Z\, d x\, d y,$$

so erkennt man die Zurückführung der Aufgabe, Kurven näherungsweise zu rektifizieren und Flächen zu komplanieren, auf die schon gelösten Aufgaben. Es ist nur $Y(x) = \sqrt{1 + y'^2}$ oder $Y(x) = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$ als die Ordinate einer ebenen Kurve, und

$$Z(x, y) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

als dritte Koordinate eines zum Punkte (x, y) zugehörenden Punktes im Raume zu deuten.

Diese Aufgabe, wie auch die Anwendung der trigonometrischen Interpolationsfunktion zur näherungsweisen Volums- und Flächenbestimmung soll hier nicht behandelt werden.

§ 45. Eine näherungsweise Lösungsmethode von gewöhnlichen Differentialgleichungen[1].

Das bestimmte Integral

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\, d x$$

ist bekanntlich als Grenzwert einer Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} f(x_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu)$$

anzusehen, wo unter x_n die obere Grenze des Integrales verstanden sein soll. Doch hiermit ist nur ausgesprochen, daß die der Differentialgleichung

---

[1]) Runge, Math. Ann., Bd. 46, 1895.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

genügende Funktion $y(x)$, die für $x = x_0$ verschwindet, eine Fläche bedeutet, die als Summe von Rechtecken mit den Breiten $x_{\nu+1} - x_\nu$ und den Höhen $f(x_\nu)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots \overline{n-1})$ zu betrachten ist. Man erhält somit die für $x = x_0$ verschwindende Lösung der Differentialgleichung, indem man während des Wachstumes der Variablen x von x_0 bis $x_1 = x_0 + \Delta x$ y den Wert 0 gibt; in x_1 entsprechend der Differentialgleichung y die Änderung $\Delta y = f(x_0)\Delta x$ erteilt, hierauf x von x_1 bis $x_2 = x_1 + \Delta x$ wachsen läßt, aber y konstant erhält und y erst in x_2 die neue Änderung $\Delta y = f(x_1)\Delta x$ erteilt usw. Die so hervorgehende Kurve ist eine gebrochene Linie, die um so genauer die Lösung der Differentialgleichung liefert, je kleiner Δx ist.

Der Fehler, den man begeht, indem man

$$y = \frac{x - x_0}{n}\left[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$$

setzt, ist, wie wir wissen, proportional $\frac{1}{n}(x - x_0)^2$.

Wenn man aber die Summe der Trapeze

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} f\left(\frac{x_\nu + x_{\nu+1}}{2}\right)(x_{\nu+1} - x_\nu) = M,$$

von deren Seiten je eine Tangente der Kurve $y = f(x)$ ist, oder wenn man die Summe der Sehnenvierecke

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{f(x_\nu) + f(x_{\nu+1})}{2}(x_{\nu+1} - x_\nu) = m$$

als Näherungswert für die Fläche setzt, so werden die Fehler proportional $\frac{(x - x_0)^3}{n^2}$ (s. S. 181 u. S. 178); und so kann man in der Annäherung weitergehen.

In entsprechender Weise kann man aber auch Vorschriften zur Integration von Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

geben, wo $f(x, y)$ eine in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0) nach der Taylorschen Reihe entwickelbare Funktion

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)\right] + \\ + \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0 (x - x_0)(y - y_0) + \\ + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 (y - y_0)^2\right] + \cdots$$

sei.

Will man die der Differentialgleichung genügende Funktion, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, entsprechend dem ersten der früheren Verfahren näherungsweise herstellen, so gebe man y für x Werte von x_0 bis $x_1 = x_0 + \varDelta x$ den Wert y_0 und erteile y in x_1 die Änderung $\varDelta y = f(x_0, y_0)\varDelta x$, so daß y den Wert erreicht

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\varDelta x;$$

hierauf lasse man x von x_1 bis $x_2 = x_1 + \varDelta x$ zunehmen und ordne dieser Änderung in x_2 die von y_1 um $f(x_1, y_1)\varDelta x$ zu, so daß y den Wert erreicht

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\varDelta x,$$

usw.

So erhält man wieder einen gebrochenen Linienzug, der den Verlauf der der Differentialgleichung genügenden Funktion y, die für $x = x_0$ den Wert y_0 hat, um so genauer darstellt, je kleiner $\varDelta x$ ist; man sagt, der die durch die Stelle (x_0, y_0) gehende Integralkurve näherungsweise darstellt.

Der Fehler der Annäherung wird aber verringert, wenn man entsprechend der Annäherung einer Fläche an ihren richtigen Wert durch „Tangententrapeze" und „Sehnentrapeze" mit Hilfe von x_0, y_0 und

$$x_1 = x_0 + \varDelta x, \quad y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\varDelta x$$

bildet:

$$\varDelta y = f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right)\varDelta x \equiv \\ \equiv f\left(x_0 + \frac{1}{2}\varDelta x, y_0 + \frac{1}{2} f(x_0, y_0)\varDelta x\right)\varDelta x$$

usw. beziehungsweise

$$\varDelta y = \frac{1}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)\right]\varDelta x \equiv \\ \equiv \frac{1}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_0 + \varDelta x, y_0 + f(x_0, y_0)\varDelta x)\right]\varDelta x$$

usw.

In der Tat zufolge der Differentialgleichung wird bei Veränderung der Variablen x von x_0 ab um Δx der Wert des Zuwachses von y

$$\Delta y = f(x_0, y_0)\Delta x + \frac{1}{2!}(f_1 + f_2 f)_{(x_0, y_0)}\Delta x^2 + $$
$$+ \frac{1}{3!}[f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2 + f_2(f_1 + f_2 f)]_{(x_0, y_0)}\Delta x^3 + \cdots,$$

wo

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \; f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \; f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \; f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \; f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

bedeutet.

Hingegen bei den Näherungsverfahren ist das erstemal

$$\Delta y = f(x_0, y_0)\Delta x,$$

das zweite- und drittemal, wo die Zuwächse von x_0 und y_0 $\frac{\Delta x}{2}$, $\frac{1}{2} f(x_0, y_0)\Delta x$ bzw. Δx und $f(x_0, y_0)\Delta x$ heißen, wird aber

$$\Delta y = \Big[f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}(f_1 + f_2 f)_{(x_0, y_0)}\frac{\Delta x}{2} + $$
$$+ \frac{1}{2!}(f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2)_{(x_0, y_0)}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \cdots\Big]\Delta x,$$

oder

$$\Delta y = \frac{1}{2}\Big[2 f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}(f_1 + f_2 f)_{(x_0, y_0)}\Delta x + $$
$$+ \frac{1}{2!}(f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2)_{(x_0, y_0)}\Delta x^2 + \cdots\Big]\Delta x.$$

So aber sieht man, daß zum Unterschiede von dem ersten Näherungsverfahren bei dem zweiten und dritten auch das Glied in Δx^2 in den Darstellungen für Δy dasselbe ist und man wird darum mit Hilfe des zweiten und dritten Näherungsverfahrens besser je ein näherungsweise richtiges Wertsystem x_1, y_1 bilden.

Als Beispiel behandle man etwa die durch den Punkt $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ gehende Integralkurve der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{1}{x^2},$$

wo y mit x in der Weise zusammenhängt, daß man rationale Operationen und arc tg $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ herzustellen hat.

Die Näherungsverfahren liefern die Beschaffenheit des Integrales in der Nachbarschaft einer ersten Stelle $(x_0; y_0)$; doch

bedürfte man wie bei dem Newtonschen Verfahren zur Lösung einer algebraischen Gleichung einer besonderen Vorschrift, durch die man von einer Stelle (x_1, y_1) zu einer auf der durch (x_0, y_0) gehenden Integralkurve befindlichen Stelle (x', y') gehen kann. Hier genüge der Gedanke, wie man durch verschiedene Näherungsverfahren zu Stellen gelangen kann, die wenigstens in der Nähe von (x_0, y_0) nahezu Stellen der Integralkurve liefern.

Hier soll uns auch die Frage nicht weiter beschäftigen, ob man Näherungsverfahren zur Bestimmung von Punkten der Integralkurve finden kann, die mehr leisten, als die bisherigen. Wir sprechen aber noch von den Differentialgleichungen zweiter Ordnung, weil diese in vielen Disziplinen, wo die Mathematik eine Anwendung findet, eine große Rolle spielen.

Setzt man in der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = F\left(x, y, \frac{d y}{d x}\right)$$

$\frac{d y}{d x} = z$, so sieht man, daß die Differentialgleichung zweiter Ordnung auf ein System simultaner Differentialgleichungen der Form zurückkommt:

$$\frac{d y}{d x} = f(x, y, z),$$

$$\frac{d z}{d x} = g(x, y, z),$$

und ein solches wollen wir besprechen.

Zur näherungsweisen Berechnung einer von der Stelle (x_0, y_0, z_0) ausgehenden Integralkurve im Raume setze man, wenn, wie die Schreibweise der Differentialgleichungen zeigt, x als unabhängige Variable angesehen wird, erstens

$$x_1 = x_0 + \varDelta x, \quad y_1 = y_0 + (f)\varDelta x, \quad z_1 = z_0 + (g)\varDelta x,$$

wo (f) und (g) die Werte von f und g an der Stelle (x_0, y_0, z_0) bedeuten sollen, und zweitens nach der Tangententrapezregel

$$x_1 = x_0 + \varDelta x,$$

$$y_1 = y_0 + f\left(\frac{x_0 + \varDelta x}{2}, \frac{y_0 + (f)\varDelta x}{2}, \frac{z_0 + (g)\varDelta x}{2}\right)$$

$$z_1 = z_0 + g\left(\frac{x_0 + \varDelta x}{2}, \frac{y_0 + (f)\varDelta x}{2}, \frac{z_0 + (g)\varDelta x}{2}\right)$$

und nach der dritten Sehnentrapezvorschrift:

$$x_1 = x_0 + \varDelta x,$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\,[f(x_0, y_0, z_0)\varDelta x + f(x_0 + \varDelta x, y_0 + \varDelta^1 y, z_0 + \varDelta^1 z)\varDelta x],$$

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}\,[g(x_0, y_0, z_0)\varDelta x + g(x_0 + \varDelta x, y_0 + \varDelta^1 y, z_0 + \varDelta^1 z)\varDelta x],$$

wo

$$\varDelta^1 y = f[x_0 + \varDelta x, y_0 + f(x_0, y_0, z_0)\varDelta x, z_0 + g(x_0, y_0, z_0)\varDelta x]\,\varDelta x,$$

$$\varDelta^1 z = g[x_0 + \varDelta x, y_0 + f(x_0, y_0, z_0)\varDelta x, z_0 + g(x_0, y_0, z_0)\varDelta x]\,\varDelta x$$

ist und wieder erkennt man, daß die Zuwächse von y_0 bzw. z_0 in dem zweiten und dritten Falle näher mit den wahren übereinstimmen als die Näherungswerte im ersten Falle. —

Eine dem hier behandelten Näherungsverfahren entsprechende Methode zur Behandlung partieller Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variablen x und y ließe sich ferner an Vorkommnisse bei der Kubatur anschließen.

Sechster Abschnitt.

Einige mathematische Instrumente.

---

§ 46. Der Rechenschieber[1]).

Nun sollen vor allem die wichtigsten mechanischen Hilfsmittel zur Sprache kommen, die für die rechnerische Bestimmung der hier vorkommenden Größen von hervorragender Bedeutung sind. So ist der Rechenschieber ein sehr bequemes Mittel zunächst zur Herstellung von Produkten und Quotienten von Zahlen, wenn nicht viele Ziffern verlangt werden. Der Rang des Produktes oder Quotienten ist nach den im ersten Abschnitte angegebenen Regeln zu bestimmen.

Der Rechenschieber besteht aus einem Lineal und einem in einer Nute des Lineals laufenden Schieber oder einer verschiebbaren Zunge und dem sog. Läufer, das ist ein zur genauen Einstellung und Ablesung benützbarer, längs dem Lineal verschiebbarer Metallrahmen, der eine Glasplatte mit einem senkrecht zur Bewegungsrichtung gespannten Haare umrahmt.

Das Lineal hat zumeist eine Länge von 250 mm, und in jedem Halbteile des Lineals findet sich eine Skala folgender Art: Die Länge von 125 mm ist so eingeteilt, daß die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 10 proportional ihrer Größe angegeben sind, und die so erhaltenen Stellen die Zahlen tragen 1, 2, 3, ... 9, 1, so daß auf dem ganzen Lineale die Zahlen vorkommen 1, 2, ... 9, 1, 2, ... 9 und 1.

Danach wird die Strecke von 1 bis 2

$$125 \times \log 2 = 37{\cdot}63 \text{ mm}$$

lang, die von 2 bis 3

$$125 \times (\log 3 - \log 2) = 22{\cdot}01 \text{ mm}$$

---

[1]) Hammer, Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch, Stuttgart 1898; Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, 1904, Bd. II, S. 146.

usw., endlich die von 9 bis 1

$$125 \times (\log 10 - \log 9) = 5{\cdot}72 \text{ mm}.$$

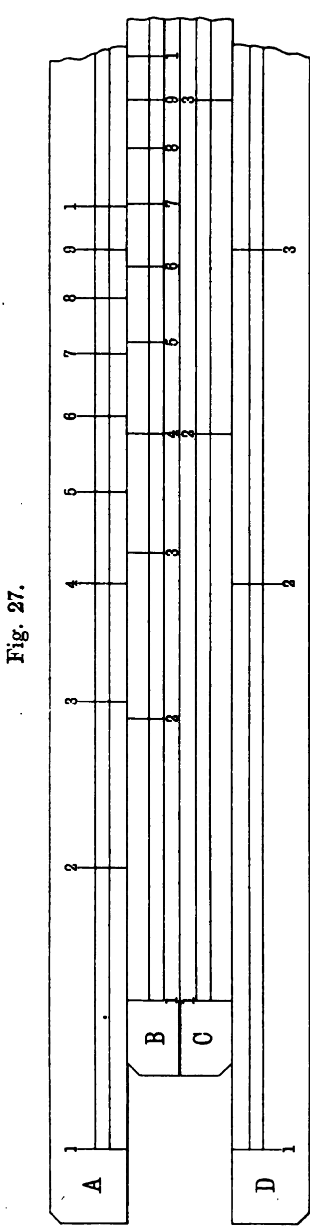


Fig. 27.

Das Intervall von 1 bis 2 ist in zehn Teile geteilt, und zwar sind die Teilstriche, von denen der fünfte etwas länger als die anderen gezogen ist, entsprechend den Werten von log 1·1, log 1·2, ... log 1·9 eingezeichnet. Jedes der nun entstehenden Teilintervalle ist in fünf Teile geteilt, so z. B. das vierte entsprechend den Werten log 1·32, log 1·34, log 1·36, log 1·38.

In jedem der Intervalle von 2 bis 3, 3 bis 4, 4 bis 5 findet man erstens eine Einteilung in zehn Teile und dann eine Einteilung jedes der neuen Intervalle in zwei Teile. So sind z. B. entsprechend den Werten von log 3, log 3·05, log 3·1, log 3·15, log 3·2 usw. Striche gezogen.

In jedem der folgenden Intervalle 5 — 6, 6 — 7, ... 9 — 1 findet man aber nur je neun Teilstriche, von denen stets der fünfte größer ist, als die zu beiden Seiten nebenstehenden acht.

Ganz dieselbe Einteilung wie auf dem bisher besprochenen oberen Rande *A* des Lineals findet sich an dem angrenzenden Teile der Zunge. Diese Skala der Zunge sei mit *B* bezeichnet.

Noch ist zu bemerken: Die einzelne Stelle ist zugleich Träger von Zahlen, die nur um Zehnerpotenzen als Faktoren voneinander verschieden sind.

.Soll man jetzt das Produkt von a und b mit Hilfe des Rechenschiebers bestimmen, so suche man erstens auf der Skala *A* eine Stelle, die log a zugehört und nach der früheren Beschreibung mit a bezeichnet ist, ver-

schiebe die Zunge derart, daß die mit 1 bezeichnete Stelle der Skala B unter die Stelle a zu stehen kommt, suche auf der Skala B den Träger von b und schätze nach Einstellung des Läufers auf den Träger von b die Zahl ab, die auf der Skala A unter dem Haare des Läufers zu stehen kommt oder käme. Diese Zahl ist auf Grund der Regel für den Logarithmus zweier Größen a und b gleich dem Produkte ab.

So findet man, abgesehen von einigen wenigen Hunderteln,

$$1{\cdot}68 \times 3{\cdot}65 = 6{\cdot}1,$$

indessen die Rechnung ergibt 6·132.

Nach der Beschreibung des Instrumentes kann man nur die ersten 2 und 3 Ziffern des Produktes, d. h. die ersten 2 und 3 Ziffern vom höchsten Range bestimmen; aber den Rang hat man, wie schon gesagt, selbständig nach unserer früheren Regel (siehe S. 18) zu ermitteln. So bestimmen wir mit Hilfe des Produktes 3×6 und des Vergleiches seiner Zehner mit den Ziffern der höchsten Rangzahlen der Faktoren 39·1 und 675, daß der Rang von $39{\cdot}1 \times 675$ vier ist, und auf dem Rechenschieber liest man ab, daß das Produkt 26 400 sei, indessen es 26 392·5 ist.

Der Quotient zweier Zahlen a und b wird mit dem Rechenschieber in seinen ersten drei Rangziffern auf Grund der Regel für den Logarithmus eines Quotienten $\frac{a}{b}$ in der Weise gefunden, daß man auf der Skala A die Stelle a fixiert und zwar auf der rechten Halbseite, wenn a abgesehen von einer Zehnerpotenz als Faktor kleiner als b ist, z. B. bei der Division von 4·5 oder 45 durch 9, dann den Träger von b auf der Skala B unter a anbringt und (mit Hilfe des Läufers) auf A die Stelle abliest, die oberhalb der Stelle 1 von B vorkommt.

Nun kann man auch mit den Skalen A und B einen Ausdruck der Form $\frac{a}{b}\,c$ bestimmen. Man suche wie früher den Träger von $\frac{a}{b}$ und gehe dann auf B von der Stelle 1 zu dem Träger von c und sehe nach, welche Stelle auf A oberhalb c angeordnet ist.

Und dieser hier eingehaltene Vorgang ist empfehlenswerter als der, erst ac zu bilden und dann die Division durch b zu vollziehen.

Die Zunge und das Hauptlineal tragen noch je eine Skala C und D, und zwar fällt auf ihre ganze Länge von 250 mm die

Skala, die früher auf den Halbteil von A und B fiel. Danach wird also oberhalb einem Teilstriche auf C und D, der Träger von a sei, auf A und B eine Stelle zu finden sein, die Träger von a^2 ist. Z. B. ist oberhalb der mit 2 bezeichneten Stelle von C und D auf den Skalen A und B, die mit 4 bezeichnete Stelle zu finden. Man findet z. B. auch $3{\cdot}16^2 = 10$, wobei ein Fehler kleiner als $\frac{2}{10^2}$ außer acht gelassen ist.

Umgekehrt liest man von einer Zahl a auf A ausgehend unter ihr auf D $\sqrt{a}$ ab.

Doch ist zur Ermittelung von $\sqrt{a}$ zu bemerken: Wenn bei Einteilung der Ziffern des Radikanden zu Paaren vom Dezimalpunkte ab an den Stellen höchsten Ranges ein Paar von Ziffern auftritt, so gehe man von der Stelle a im rechtsliegenden Halbteile von A zu $\sqrt{a}$ auf D unter ihr. Z. B. findet man $\sqrt{23{\cdot}3} = 4{\cdot}82$ und $\sqrt{90} = 9{\cdot}48$.

Doch wenn bei der Abteilung der Ziffern von a zu Paaren unter den Stellen höchsten Ranges eine Ziffer allein auftritt, so gehe man von der Stelle a im linksliegenden Halbteile von A zu der unter ihr befindlichen $\sqrt{a}$ auf D. Man hat z. B. $\sqrt{7{\cdot}64} = 2{\cdot}76$, $\sqrt{9} = 3$.

Noch sei zur Anwendung des Rechenschiebers beschrieben, wie man den Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r aufsucht, damit wir auch zur Aussage gelangen, der Träger von π sei auf den Skalen A und B eingezeichnet. Man suche also auf D den Träger von r, stecke mit dem Läufer auf A r^2 ab, stelle die Stelle 1 von b darunter und gehe auf B bis zur Stelle π. Oberhalb auf A finden wir eine Stelle, die den Inhalt der Kreisfläche angibt.

Die Bestimmung höherer Potenzen a^n und höherer Wurzeln $\sqrt[n]{a}$, wenn $n \geqq 3$ ist und auch die von $\sin\alpha$ und $\operatorname{tg}\alpha$ soll hier nicht beschrieben werden, weil diese Operationen außer im Falle, daß $n = 3$ gilt, neue Skalen erfordern und darum nicht mehr die Einfachheit der Operationen wie bisher besteht. Aber es soll noch über die Fehler bei den bisherigen Rechnungen mit dem Rechenschieber gesprochen werden.

Bildet man mit dem Rechenschieber n Produkte

$$a_\nu b_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n),$$

so sind diese mit positiven oder negativen Fehlern δ_ν behaftet, die man genau angeben kann, indem man die Differenzen der genauen Werte und der mit dem Meßinstrumente zu findenden bildet. In Prozenten ausgedrückt ist dann der $a_\nu b_\nu = p_\nu$ anhaftende Fehler $\frac{100\,\delta_\nu}{p_\nu}$, d. h. dem Produkte 100 gehört dieser Fehler an. Darum ist der mittlere Fehler der n Werte für die Produkte in Prozenten

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\left(\frac{100\,\delta_\nu}{p_\nu}\right)^2}\ ^{1)}.$$

Man findet hierfür den Wert 0·16 Proz., und d. h. 0·16 Proz. des Produktes ist als der Fehler bei der Multiplikation mit dem Rechenschieber einzuführen.

Die Multiplikation erfordert drei Ablesungen; ebenso die Division. Darum ist der Fehler des Quotienten ebenfalls 0·16 Proz.

§ 47. Eine graphische Methode zur Flächenbestimmung.

In dem Abschnitte über die Anwendung der Interpolationsrechnung auf die näherungsweise Quadratur wurde schon gesagt, daß man den Inhalt einer durch eine Kurve $y = f(x)$, die x Achse und zwei Gerade $x = c$ und $x = d$ begrenzten Fläche näherungsweise bestimme, indem man das Intervall von c bis d in n gleiche Teile teilt, dann die aufeinanderfolgenden Kurvenbögen, deren Projektionen auf die x Achse $\frac{d-c}{n}$ sind, je durch einen anderen Bogen ersetzt, der einer Parabel mit einem zur y Achse parallelen Hauptdurchmesser angehört, und der durch die Endpunkte des zu ersetzenden Bogens wie auch durch den Kurvenpunkt hindurchgeht, der dem Halbierungspunkte des Intervalles entspricht, dann aber die bis zu den Parabelbögen reichenden Flächenstreifen bestimmt und vereinigt.

Doch dieses Verfahren hat seine Umständlichkeit und insbesondere dann, wenn der von einer geschlossenen Kurve begrenzte Bereich bestimmt werden soll. Darum soll vor Beschreibung

[1]) An späterer Stelle wird darauf aufmerksam gemacht, daß der mittlere Fehler gegenüber den wahren Fehlern von Beobachtungeu ein anderer ist als der gegenüber „scheinbaren Fehlern“ dieser Beobachtungen.

von Apparaten zur Flächenbestimmung diese auch noch in anderer Weise vollzogen werden.

Man teile die Umrandung des geschlossenen Bereiches in solche Teile, daß der einzelne Teil gut durch einen Parabelbogen zu ersetzen ist, bestimme dann die zwischen den Parabelbögen und den zugehörigen Sehnen befindlichen Parabelsegmente und auch den von aneinander stoßenden Sehnen begrenzten Flächenteil.

Der Flächeninhalt eines Parabelsegmentes soll hier analytisch bestimmt werden.

Es sei $y^2 = 2px$ die Gleichung einer Parabel und (x_1, y_1), (x_2, y_2) seien die Koordinaten zweier Parabelpunkte. Dann ist der Inhalt des Parabelabschnittes, dessen Sehne s die beiden Punkte verbindet, nach einem bekannten Satze:

$$fl = \frac{2}{3}(x_2 y_2 - x_1 y_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1),$$

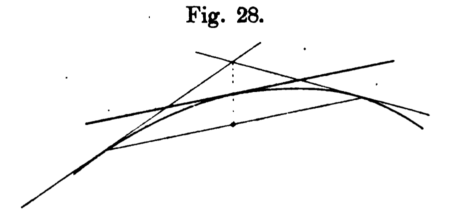
oder nach einer Umwandlung

$$fl = \frac{1}{6}(x_2 y_2 - x_1 y_1) + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Wir werden nun aber zeigen, daß diese Fläche auch gleichkommt der Fläche desjenigen Dreiecks über der Sehne s, dessen Höhe $\frac{4}{3}$ der Entfernung desjenigen Parabelpunktes von der Sehne ist, in dem man eine zur Sehne parallele Tangente an die Parabel legen kann.

Nur sei vorher bemerkt, daß man den Berührungspunkt der zur Sehne parallelen Tangente erhält, der die Koordinaten (x', y')

Fig. 28.



habe, indem man die Parabel mit der Verbindungslinie des Schnittpunktes der in den Endpunkten der Sehne zu verzeichnenden Parabeltangenten mit dem Halbierungspunkte der Sehne zum Schnitte bringt.

Die Tangente des Neigungswinkels der Parabeltangente in dem Punkte (x', y') gegenüber der positiven Richtung der x Achse ist

$$\frac{p}{y'}.$$

Doch es soll sein

$$\frac{p}{y'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

und danach erhält man für die Koordinaten des Berührungspunktes der zur Sehne parallelen Tangente die Werte

$$x' = \frac{p}{2}\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right)^2 \quad \text{und} \quad y' = p\,\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.$$

Nun aber wurde behauptet, daß

$$fl = \frac{1}{2}\,s \cdot \frac{4}{3}\,h$$

sei, und das findet man wirklich bestätigt, weil der Abstand h des Punktes (x', y') von der Sehne ist:

$$h = \frac{y'(x_1 - x_2) - x'(y_1 - y_2) + (y_1 x_2 - x_1 y_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

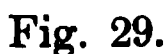
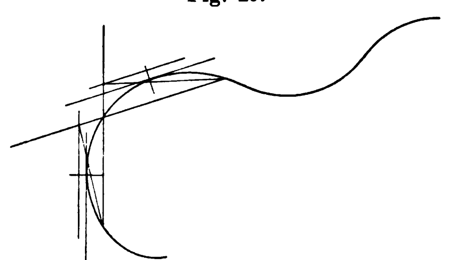


Fig. 29.



Bei Ausführung der angegebenen Methode wird man mit Vorteil auf der Verlängerung der Seite eines Dreieckes die der Sehne gegenüberliegende Ecke des benachbarten Dreieckes legen.

§ 48. Der Integraph[1]).

Die Größe einer Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$, der x Achse und zweien in den Abständen a und x gelegten Par-

[1]) Abakanowicz, Sur l'integraph et la courbe integrale. Paris 1889, deutsch von Bitterli, 1889.

allelen zur y Achse kann man dadurch angeben, daß man die zu dem Werte x gehörende Ordinate Y der Kurve $Y = F(x)$ bestimmt, für welche

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

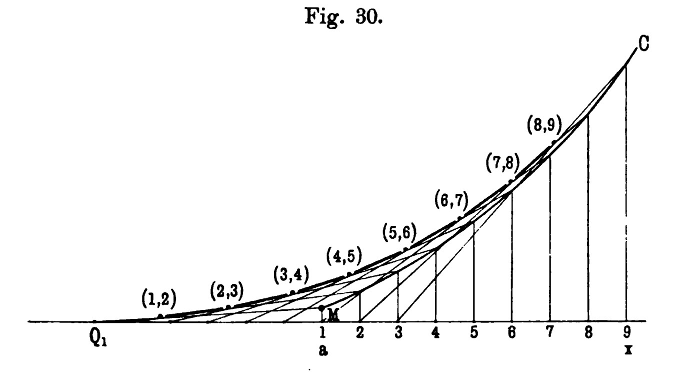
ist.

Die neue Kurve heißt eine **Integralkurve** der gegebenen und zwar die, welche eine für $x = a$ verschwindende Ordinate besitzt. Sie hat die Eigenschaft, daß

$$\frac{dY}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = y$$

ist; d. h. in dem dem Punkte (x, y) entsprechenden Punkte (x, Y) der neuen Kurve hat die Tangente gegenüber der positiven Richtung der x Achse eine Neigung φ, deren trigonometrische Tangente gleich ist $\frac{y}{1}$. Danach hat also die zu der gegebenen Kurve gehörende Integralkurve, die der Anfangsbedingung genügt, daß $(Y)_{x=a} = 0$ ist, Tangenten, deren Neigungswinkel gegenüber der positiven x Achse trigonometrische Tangenten

Fig. 30.



besitzen, die sich von $f(a)$ bis $f(x)$ verändern; und man bewerkstelligt eine näherungsweise Zeichnung der verlangten Kurve, indem man an verschiedenen, am passendsten an äquidistanten Stellen des Intervalles von a bis x die Längeneinheit 1 im Sinne der negativen x aufträgt und von dem jeweiligen Endpunkte der Längeneinheit Q nach dem Endpunkte der x zugehörenden Ordinate der gegebenen Kurve eine Gerade legt, denn dadurch hat

man die Tangentenrichtungen der verlangten Kurve an den von a bis x gewählten Stellen, hat aber auch einen ihrer Punkte $(a, 0)$ und kann die Integralkurve durch ein ihr einzuschreibendes Polygon ersetzen. Die zu x gehörende Ordinate Y dieser Kurve liefert die Größe der verlangten Fläche.

Wenn man danach einen Punkt M' auf der durch den Kurvenpunkt M gelegten Parallelen zur Ordinatenachse beliebig wählt und M' zwingt, sich in der Richtung von QM zu bewegen, so erhält man eine solche Kurve, bei der die Fortschreitungsrichtung in dem Punkte (x, Y) gleich y ist. Doch das ist nur die verlangte Kurve, wenn Y an der Stelle $x = a$ null ist.

Wenn man also die von M' beschriebene Kurve auf ein Koordinatensystem bezieht, dessen x Achse durch die Anfangslage von M' hindurchgeht und der gegebenen x Achse parallel ist, indessen die Y Achse mit der gegebenen zusammenfällt, so gibt die Ordinate der von M' beschriebenen Kurve, die zur Abszisse x gehört, die Fläche

$$\int_a^x f(x)\,dx.$$

Wenn man die von M' beschriebene Kurve aber auf ein Koordinatensystem bezieht, das sich von dem letzten durch die Lage der x Achse unterscheidet, diese etwa der früheren im Abstande C parallel läuft, so gibt die Ordinate der von M' beschriebenen Kurve, die zu dem Werte x gehört,

$$\int_a^x f(x)\,dx + C.$$

Die verlangte Kurve beschreibt danach ein Apparat, der folgende Eigenschaften hat: Beim Durchlaufen der gegebenen Kurve mit einem Punkte M soll ein Punkt Q der x Achse mit ihm in solcher Verbindung bleiben, daß die Projektion von QM auf die x Achse die konstante Länge eins hat, und ferner soll ein mit M und Q in Verbindung erhaltener Punkt M' auf der durch M gelegten Senkrechten zur x Achse gezwungen werden, sich in der Richtung von QM fortzubewegen.

Man kennt die Bedeutung der von M' beschriebenen Kurve und weiß die x Achse so zu legen, daß die zu einer beliebigen

Abszisse gehörende Ordinate die verlangte Fläche liefert, d. h. es muß in dem Anfangspunkte $x = a$ die Ordinate Y null sein.

Die Beschreibung dieses Apparates, wie ihn Abdank-Abakanowicz erfand, ist umständlich und wäre hier wenig zweckdienlich, indem die Beschreibung dem Leser ohne Augenschein keine Einsicht bieten kann. Darum soll die Bedeutung des Apparates nur dadurch hervorgehoben werden, daß gezeigt wird, wie durch Zeichnung von Integralkurven die Träger der Lösungen einer vorgegebenen algebraischen Gleichung

$$g(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

mit reellen Koeffizienten zu finden sind.

Das wird möglich werden, indem man $y = g(x)$ zu einer Integralkurve werden läßt und deren Schnittpunkte mit der Geraden $y = 0$ ermittelt. Denn diese kommen mit den verlangten Wurzeln überein.

Bildet man

$$\frac{d^n y}{d x^n} = n!\, a_0$$

und von der Geraden $y = n!\, a_0$ ausgehend mit dem Integraphen deren Integralkurve $Y = n!\, a_0 x + C_1$, setzt aber

$$C_1 = (n-1)!\, a_1$$

und sucht nun von der Geraden

$$y = n!\, a_0 x + (n-1)!\, a_1$$

weitergehend deren Integralkurve

$$Y = \frac{n!}{2!} a_0 x^2 + \frac{(n-1)!}{1!} a_1 x + C_2$$

und setzt

$$C_2 = (n-2)!\, a_2$$

usw., sucht endlich die Integralkurve von

$$y = \frac{n!}{(\nu-1)!} a_0 x^{\nu-1} + \frac{(n-1)!}{(\nu-2)!} a_1 x^{\nu-2} + \cdots + \frac{(n-\nu+1)!}{1!} a_{\nu-1},$$

nämlich

$$Y = \frac{n!}{\nu!} a_0 x^\nu + \cdots + \frac{(n-\nu+1)!}{1!} a_{\nu-1} x + C_\nu$$

und setzt auch hier

$$C_\nu = (n - \nu)!\, a_\nu,$$

so wird im Falle $\nu = n$

$$Y = g(x)$$

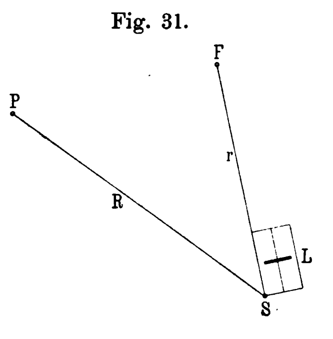
endlich auch eine Integralkurve, und deren Schnittpunkte mit der Geraden $Y = 0$ haben Abszissen gleich den verlangten Wurzeln; und so ist gezeigt, wie man mit dem Integraphen die Kurve $y = g(x)$ zeichnet und die Nullstellen von $g(x)$ konstruktiv bestimmt.

§ 49. Amslers Polarplanimeter[1]).

Das wichtigste mechanische Hilfsmittel zur Bestimmung der Größe einer vorgelegten geschlossenen ebenen Fläche ist das heute viel benützte Polarplanimeter von Amsler aus dem Jahre 1854.

Dieses Planimeter, wie auch das verbesserte Kompensationsplanimeter von Coradi besteht im wesentlichen aus einem um einen bei der Messung festzuhaltenden Punkt — um einen Pol P — drehbaren Polarm und aus einem um dessen bewegliches Ende S drehbaren Fahrarm, an dessen freiem Ende ein Fahrstift F angebracht ist, mit dem man die Umrandung der zu bestimmenden Fläche zu befahren hat. Der Fahrarm läßt sich so stellen, daß F unter die Verbindungslinie von P und S fällt und nach beiden Seiten ausschlagen kann. Die Länge des Fahrarmes heiße r, die des Polarmes R.

Fig. 31.



Amsler brachte ferner an einem über S hinausragenden Teile des Fahrarmes ein Laufrad L mit glattem Rande an, dessen Achse der des Fahrarmes parallel läuft; doch Coradi bringt das auch mit einem Zählwerk zu verbindende Laufrad neben dem Fahrarm an mit einer Achsenrichtung wie früher. Die beistehende schematische Zeichnung verdeutlicht die Anordnung.

Indem nun der Fahrstift eine geschlossene Kurve durchläuft, macht das Rad Umdrehungen, aus deren Anzahl man auf die Größe der umfahrenen Fläche schließt.

---

[1]) Jordan, Handbuch der Vermessungskunde 1904, Bd. II, S. 126.

Wird das Laufrad in der Richtung seiner Achse bewegt, so macht es keine Umdrehungen; aber wenn es senkrecht zur Richtung seiner Achse bewegt wird, so macht es allein Umdrehungen

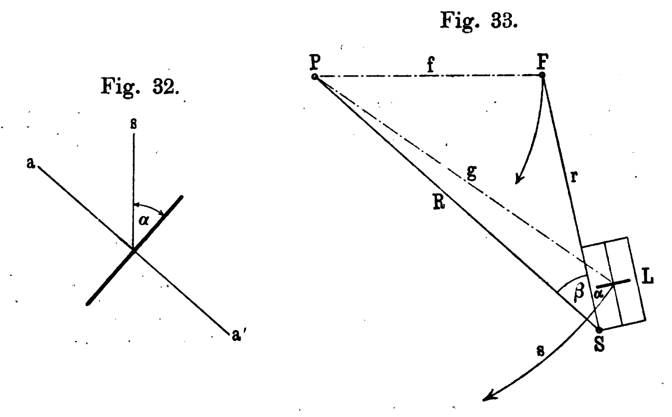


Fig. 32. Fig. 33.

und gleitet nicht. Wenn endlich der Mittelpunkt des Rades längs einem geradlinigen Wege s unter der Neigung von α Grad gegen die Radebene bewegt wird, so wird von dem Rade ein Bogen $b = s \cos \alpha$ abgewickelt (s. Fig. 32).

Wenn ferner der Fahrstift F einen Kreisbogen $f\varphi$ um P beschreibt, wo $f = \overline{FP}$ und φ der Drehungswinkel im Bogenmaß ist, so beschreibt auch das freie Ende S des Polarmes einen Bogen von der Länge $R\varphi$. Wenn nun die Entfernung des Mittelpunktes des Laufrades, der auch L heiße, vom Pole g genannt wird, so ist der vom Laufrade beschriebene Weg $g\varphi$ und der vom Rade abgewickelte Bogen $b = s \cos \alpha = g \varphi \cos \alpha$, wo α nach der Zeichnung (s. Fig. 33) auch der Winkel zwischen PL und der Radachse ist, denn PL steht auf dem Wege von L senkrecht.

Projiziert man $PL = g$ und den Polarm R auf den Fahrarm, nennt β den Winkel zwischen Pol- und Fahrarm und nennt d den Abstand des Punktes S von der Radebene, so ist

$$g \cos \alpha = R \cos \beta \mp d,$$

je nachdem man die Anordnung des Meßrädchens gegenüber anderen Teilen des Instrumentes nach Coradi oder Amsler trifft. Ferner gilt

$$f^2 = R^2 + r^2 - 2 R r \cos \beta,$$

und danach

$$b = \varphi (R \cos \beta \mp d) = \varphi \left(\frac{R^2 + r^2 - f^2}{2r} \mp d \right),$$

und nach Einführung des Zeichens

$$C^2 = R^2 + r^2 \mp 2rd$$

wird

$$rb = \frac{\varphi}{2}(C^2 - f^2).$$

Hier ist C nach seiner Definition der Wert von f, den man erhält, wenn der Fahrarm auf der Verbindungslinie von P und L senkrecht steht.

Wenn nun der Fahrstift auf einem Kreise mit dem Radius C um P in stets gleichem Sinne bewegt wird, so erfährt das Laufrad keine Drehung, weil rb verschwindet und die Radebene stets auf dem von L durchlaufenen Kreise senkrecht steht. Aber wenn F einen Bogen b auf dem Kreise f um P beschreibt, so

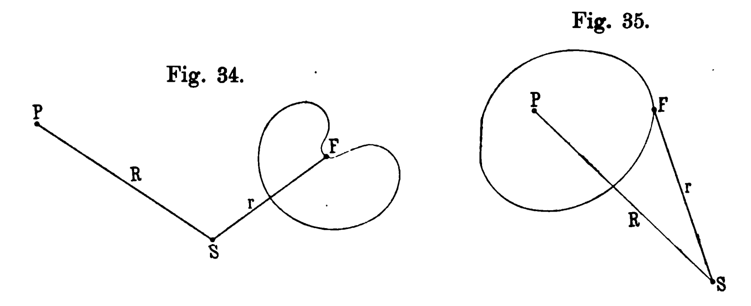


Fig. 34. Fig. 35.

wird ein solcher Bogen des Laufrades abgewickelt, daß rb der Differenz zweier dem Bogen φ angehörender Kreissektoren mit den Radien C und f gleich wird; und daher ist rb der Inhalt eines von P aus radial ausgeschnittenen Teiles eines Kreisringes mit den Radien C und f und der Öffnung φ.

Wenn man F aber einen geschlossenen Kurvenweg durchlaufen läßt, so kann man den von F beschriebenen Bogen aus Kreisbögen um P und geradlinigen von P aus radial ausgedehnten Strecken zusammengesetzt denken und man sieht, daß nach Rückkehr des Fahrstiftes zum Ausgangspunkte der Bewegung die den geradlinigen Elementen zugehörenden Drehungen des Laufrades einander aufheben.

Danach aber wird das Produkt aus der Länge des Fahrarmes in den abgewickelten Bogen des Laufrades, d. i. rb, sofern die umfahrene Fläche den Punkt P nicht enthält (s. Fig. 34), gleich dem Inhalte der umfahrenen Fläche.

Wenn aber die umfahrene Fläche den Pol P enthält (siehe Fig. 35 a. v. S.), so drückt rb den Inhalt der umfahrenen Fläche bis auf $C^2\pi$ aus, was uns in dem Falle des Kreises C um P — des sog. Grundkreises — früher schon bekannt wurde, denn da war $rb = 0$[1]).

Nennt man den Radius des Laufrades ϱ und ist n die Anzahl seiner Umdrehungen bei einem Versuche, so ist $2\varrho\pi n = b$, also die Größe der umfahrenen Fläche in den zwei unterschiedenen Fällen

$$2\varrho\pi n \,.\, r$$

oder

$$2\varrho\pi n \,.\, r + C^2\pi.$$

Wird $2\varrho\pi r$, d. i. die einer Umdrehung des Rädchens zukommende Fläche, mit F bezeichnet, so wird also die umfahrene Fläche

$$\mathsf{F}n$$

oder

$$\mathsf{F}n + C^2\pi.$$

Man richtet das Instrument so ein, daß F einen einfachen Zahlenwert, etwa 100 erhält und die Größe der Fläche $100\,n$ mm² oder $(100\,n + C^2\pi)$ mm² wird. Der Fehler bei Umfahrung einer Fläche von 50 cm² ist im Mittel gleich 3 mm².

---

[1]) Der sog. Grundkreis C ist nicht die einzige Kurve, bei deren Durchlaufen mit F das Rädchen keine Drehung erfährt. Siehe Lorenz, l. c., S. 8 u. 9.

Nachtrag.

Der Grundgedanke der Ausgleichsrechnung[1]).

Im Nachstehenden sollen die der Ausgleichs- und Wahrscheinlichkeitsrechnung angehörenden früheren Aufgaben zusammenhängend zur Sprache gebracht werden, vor allem weil der Leser der Methode der kleinsten Quadrate unter den Näherungsmethoden nicht entraten kann.

Wird etwa ax, wo x eine Veränderliche sei, oder werden bekannte Verbindungen mehrerer Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ — etwa die m linearen Verbindungen

$$a_\mu x_1 + b_\mu x_2 + \cdots + d_\mu x_m, \quad (\mu = 1, 2, \ldots m)$$

— mehr als einmal bestimmt, d. h. gemessen oder beobachtet, so daß es mehr „Beobachtungsgleichungen"

$$a x - l = 0,$$

bzw.

$$a_\mu x_1 + b_\mu x_2 + \cdots + d_\mu x_m - l_\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots m)$$

gibt, als zur Berechnung der Variablen nötig sind, so bestehen zufolge der den Beobachtungsgrößen l_μ anhaftenden Fehler ε_μ, d. i.

$$a_\mu x_1 + b_\mu x_2 + \cdots + d_\mu x_m - l_\mu = \varepsilon_\mu,$$

in den Beziehungen zwischen den Variablen und den Größen l_μ Widersprüche, die sich durch gar keine Annahme über die zu bestimmenden, aber überbestimmten Größen beheben lassen.

Es ist nun die Aufgabe, diese Widersprüche auszugleichen, d. h. es sollen die der Wahrheit zunächst liegenden Werte der Unbekannten aufgesucht werden. Dazu muß gesagt werden und eine Entscheidung darüber getroffen werden, welche Werte die der Wahrheit zunächst kommenden genannt werden.

---

1) Bauschinger, Encyklopädie, Bd. I, S. 768.

Zur Erläuterung diene das früher vorgekommene Beispiel, S. 39, wo $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ für die Wertesysteme (ξ, η), die in einer (ξ, η) Ebene in den Punkten des ersten Quadranten und zwischen den Geraden $\eta = 0$ und $\eta = \xi$ ihre Träger fanden, näherungsweise durch einen Ausdruck darzustellen war

$$\xi x_1 + \eta x_2.$$

Es gibt ja keinen Ausdruck dieser Form für die algebraische Funktion. Was man daher auch den fraglichen Koeffizienten für Werte geben mag und was im allgemeinen ξ und η auch für Werte haben (ξ_i, η_i), so wird

$$\xi_i x_1 + \eta_i x_2$$

gegenüber $\sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}$ einen Fehler ε_i besitzen.

Es ist die Aufgabe, die unbekannten Koeffizienten x_1 und x_2 so zu wählen, daß der Wert von $\xi_i x_1 + \eta_i x_2$ in dem genannten Bereiche dem positiven Werte von $\sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}$ am nächsten liege. —

Bei der Entscheidung, welche Werte als die der Wahrheit zunächst liegenden bezeichnet werden, sind die Forderungen maßgebend:

1. daß sie mit der Natur der Beobachtungsfehler in Übereinstimmung stehen und
2. daß die zur Bestimmung der Werte nötigen Berechnungen einfache seien.

Gauss hat die wahrscheinlichsten Werte als die der Wahrheit zunächst liegenden eingeführt, und stellte das nach ihm benannte Fehlergesetz auf, das ist eine Funktion $\varphi(\varepsilon)$, die die Häufigkeit des Fehlers durch den Fehler ε ausdrückt. Dem Fehler ε kommt dann die Wahrscheinlichkeit $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ zu und die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_m$ — sie heißen $X_1, X_2, \ldots X_m$ — wurden die, für die die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der $x_1, x_2, \ldots x_n$ anhaftenden Fehler einen Maximalwert annahm.

Damit wurde offenbar der ersten Forderung genügt, und der zweiten geschieht bei der Form des Fehlergesetzes auch Genüge. Doch dieses Gesetz ergab sich Gauss nur unter der Annahme, daß das arithmetische Mittel aus direkten Beobachtungen einer Größe der wahrscheinlichste Wert derselben sei, und zwar ist dann

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2},$$

wo h die von der Genauigkeit der Beobachtungen abhängige Präzisionskonstante ist.

Diese Konstante findet man nach Ermittelung des aus den Beobachtungswerten einer Größe x, aus $l_1, l_2, \ldots l_n$ und aus den scheinbaren Fehlern

$$l - l_\nu = v_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n),$$

wo l das arithmetische Mittel der l_ν ist, berechneten mittleren Fehlers

$$\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}},$$

und zwar ist

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2\mu} = \frac{0{\cdot}707\,11}{\mu}.$$

Früher schon war bekanntlich

$$[v\,v] = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} v_\nu^2.$$

Auch ist hier zu bemerken, daß der aus den wahren Fehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ berechnete mittlere Fehler folgendermaßen auszudrücken ist:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}},$$

wie z. B. in dem Falle des mittleren Fehlers von den an dem Rechenschieber abzulesenden Werten für das Produkt zweier Faktoren a und b.

Das Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ wurde auch ohne den Satz vom arithmetischen Mittel und zwar aus der Natur der aus Elementarfehlern zusammengesetzt gedachten Fehler abgeleitet; doch kein Beweis ist einwandfrei.

Das Gausssche Fehlergesetz ist aber gewiß auch nicht richtig, indem nämlich nach diesem erst die Häufigkeit eines solchen Fehlers null wird, der dem Betrage nach größer ist, als jede noch so große Zahl anzeigt; das trifft aber gewiß nicht zu. Trotzdem hat das Gausssche Fehlergesetz allgemeine Aufnahme gefunden, indem es, wie die Erfahrung lehrt, die Tatsachen doch sehr gut beschreibt.

Ist das Fehlergesetz aufgestellt, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen eines Fehlers von einem Betrage kleiner als ε gleich

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varepsilon} e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varepsilon h} e^{-t^2}\,dt$$

und die früher genannten Werte X_1, X_2, ... X_m sind diejenigen, für die die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird; und danach verlangten wir auch (S. 112 und 154), daß die Koeffizienten einer Näherungsfunktion $g(x)$ von $f(x)$ so bestimmt werden, daß die Summe von Fehlerquadraten ein Minimum werde.

Zum Beweise, daß die Werte x_1, x_2, ... x_m entsprechend der Forderung zu bestimmen seien, die Summe der Fehlerquadrate habe ein Minimum zu werden, bemerke man:

Sollen x_1, x_2, ... x_m solche Werte annehmen, daß, wie schon früher gesagt war, die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der Fehler ε_1, ε_2, ... ε_n ein Maximum werde, so soll das auch für das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\varepsilon_\nu^2}$$

zutreffen. Doch das wird der Fall, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \varepsilon_\nu^2$$

ein Minimum wird. Damit ist die Methode der kleinsten Quadrate begründet.

Werden hierauf allgemeine Verbindungen der m Unbekannten x_1, x_2, ... x_m

$$f_\mu(x_1, x_2, \dots x_m) \quad (\mu = 1, 2, \dots m)$$

n mal und öfter beobachtet, als die Berechnung der m Unbekannten es nötig macht — die Beobachtungswerte heißen l_ν — und kennt man Näherungswerte $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ... $x_m^{(0)}$, so lassen sich die Gleichungen auf Grund der Taylorschen Entwickelungen der Funktionen f_μ nach Einführung der Zeichen

$$x_\mu - x_\mu^{(0)} = z_\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots m)$$

in der Umgebung der Stelle $(x^{(0)})$ näherungsweise auf eine lineare Form bringen:

$$\begin{aligned}
a_1 z_1 + b_1 z_2 + \cdots + d_1 z_m &= \lambda_1,\\
a_2 z_1 + b_2 z_2 + \cdots + d_2 z_m &= \lambda_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_n z_1 + b_n z_2 + \cdots + d_n z_m &= \lambda_n,
\end{aligned}$$

wobei

$$\lambda_\mu = l_\mu - f_\mu(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_m^{(0)}) \quad (\mu = 1, 2, \ldots m)$$

bedeutet.

Nun sucht man die Werte $z_1, z_2, \ldots z_m$, für welche die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird, und diese Fehler sind:

$$\begin{array}{l} a_1 z_1 + b_1 z_2 + \cdots + d_1 z_m - \lambda_1 = \varepsilon_1, \\ a_2 z_1 + b_2 z_2 + \cdots + d_2 z_m - \lambda_2 = \varepsilon_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n z_1 + b_n z_2 + \cdots + d_n z_m - \lambda_n = \varepsilon_n. \end{array}$$

Man findet nun leicht, daß das jetzt in Frage stehende Wertesystem — es heiße $Z_1, Z_2, \ldots Z_m$ — das ist, welches das bestimmte Gleichungensystem befriedigt:

$$\begin{array}{l} [a\,a]\,Z_1 + [a\,b]\,Z_2 + \cdots + [a\,d]\,Z_m = [a\,\lambda], \\ [b\,a]\,Z_1 + [b\,b]\,Z_2 + \cdots + [b\,d]\,Z_m = [b\,\lambda], \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [d\,a]\,Z_1 + [d\,b]\,Z_2 + \cdots + [d\,d]\,Z_m = [d\,\lambda], \end{array}$$

wo

$$[a\,b] = [b\,a] = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu\, b_\nu$$

ist usw.

Das Wertesystem $X_1, X_2, \ldots X_m$ ergibt sich damit, daß man bildet:

$$X_\mu = x_\mu^{(0)} + Z_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots m).$$

SACHREGISTER.

NAMENREGISTER.

(Die den Namen beigesetzten Zahlen bedeuten Seitenzahlen.)



